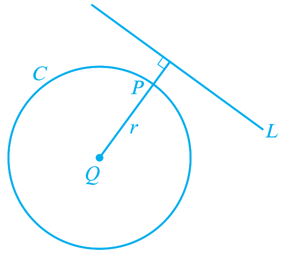
計算題（每題 25 分，共 100 分）

1. 設圓 $C：x^2+y^2-2x+4y-4=0$，試求圓 C 上距直線 $L：3x+4y=15$ 最近之點的坐標，以及此時之最短距離．



解：$C：x^2+y^2-2x+4y-4=0$

⇨ $(x^2-2x+1)+(y^2+4y+4)=4+5$

⇨ $(x-1)^2+(y+2)^2=3^2$

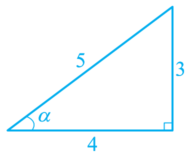
圓心 $Q(1，-2)$，半徑 $r=3$，$P(x，y)\in C$

⇨ 圓 C 的參數式為 $P(x，y)：\begin{cases} x=1+3\cos\theta \\ y=-2+3\sin\theta \end{cases}$，$0\le\theta<2\pi$

⇨ $d(P，L)=\dfrac{|3\cdot(1+3\cos\theta)+4(-2+3\sin\theta)-15|}{\sqrt{3^2+4^2}}$

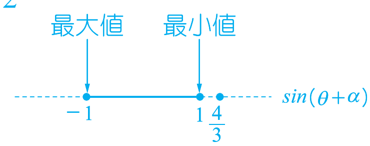
$=\dfrac{3}{5}\left|3\cos\theta+4\sin\theta-\dfrac{20}{3}\right|=3\left|\sin\theta\cdot\dfrac{4}{5}+\cos\theta\cdot\dfrac{3}{5}-\dfrac{4}{3}\right|$

$=3\left|\sin(\theta+\alpha)-\dfrac{4}{3}\right|$



其中 $\cos\alpha=\dfrac{4}{5}$，$\sin\alpha=\dfrac{3}{5}$

故當 $\sin(\theta+\alpha)=1$，即 $\theta+\alpha=\dfrac{\pi}{2}$，亦即 $\theta=\dfrac{\pi}{2}-\alpha$ 時，



$d(P，L)=3\left|1-\dfrac{4}{3}\right|=1$ 為最短距離

此時，$P(x，y)：\begin{cases} x=1+3\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-\alpha\right)=1+3\sin\alpha=\dfrac{14}{5} \\ y=-2+3\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-\alpha\right)=-2+3\cos\alpha=\dfrac{2}{5} \end{cases}$

亦即 $P\left(\dfrac{14}{5}，\dfrac{2}{5}\right)$ 為圓 C 上距 L 最近之點

2. 設 R 為圓 $C：x^2+y^2+4x-6y-19=0$ 上之動點，$A(2，-3)$ 為一定點，若 P 為 $\overline{AR}$ 之中點，試求動點 P 所形成的圖形之方程式，若為一圓，則求其圓心與半徑．

解：

設 $R(a，b)\in C$，則 $P(x，y)=\left(\dfrac{2+a}{2}，\dfrac{-3+b}{2}\right)$

$\Rightarrow R(a，b)=(2x-2，2y+3)\in C$

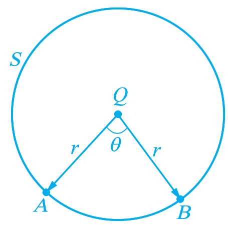
$\Rightarrow (2x-2)^2+(2y+3)^2+4(2x-2)-6(2y+3)-19=0$

$\Rightarrow 4x^2-8x+4+4y^2+12y+9+8x-8-12y-18-19=0$

$\Rightarrow x^2+y^2=8=(2\sqrt{2})^2$

故動點 P 所形成的圖形為一圓，圓心 $Q(0，0)$，半徑 $r=2\sqrt{2}$

3. 空間坐標中，球面 $S：x^2+y^2+z^2=16$ 上有兩點 $A(-2，2\sqrt{2}，-2)$，$B(-2，-2\sqrt{2}，2)$，現有一隻螞蟻沿球面 S 從 A 爬到 B，試求其所經最短路徑之長．



解：球面 $S：x^2+y^2+z^2=16\Rightarrow$ 球心 $Q(0，0，0)$，半徑 $r=4$

令 $\overrightarrow{OA}=(-2，2\sqrt{2}，-2)$，$\overrightarrow{OB}=(-2，-2\sqrt{2}，2)$

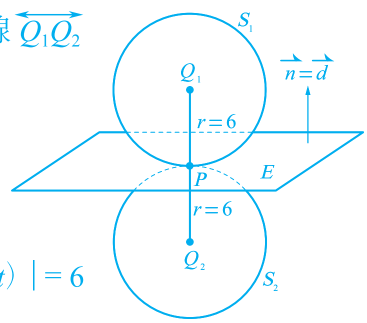
如右圖，設 θ 為 $\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OB}$ 之夾角，則有

$$\cos\theta=\frac{\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}}{|\overrightarrow{OA}|\,|\overrightarrow{OB}|}=\frac{4-8-4}{4\cdot 4}=\frac{-8}{16}=-\frac{1}{2}\Rightarrow\theta=\frac{2\pi}{3}\ (=120^\circ)$$

故所求劣弧 AB 之長 $\overset{\frown}{AB}=r\times\theta=4\times\dfrac{2\pi}{3}=\dfrac{8\pi}{3}$

4. 試求半徑為 6 且與 $E：x-2y+2z=15$ 相切於點 $P(1，-2，5)$ 的球面方程式．

解：如右下圖，令 $\vec{n}=(1，-2，2)$ 為 $E：x-2y+2z=15$ 之一法向量，則 $\vec{d}=\vec{n}=(1，-2，2)$ 亦為球心 Q_1，Q_2 所在直線 $\overleftrightarrow{Q_1Q_2}$ 之一方向向量，又直線 $\overleftrightarrow{Q_1Q_2}$ 過 $P(1，-2，5)$，



故其參數式為 $\overleftrightarrow{Q_1Q_2}：\begin{cases}x=1+t\\ y=-2-2t，t\in\mathbb{R}\\ z=5+2t\end{cases}$

$|t\vec{d}|=6=r\Rightarrow|t(1，-2，2)|=6\Rightarrow|(t，-2t，2t)|=6$

$\Rightarrow t^2+4t^2+4t^2=36\Rightarrow 9t^2=36\Rightarrow t^2=4\Rightarrow t=\pm2$

(1) 當 $t=2$ 時，球心為 $Q_1(3，-6，9)$

所求之球面方程式為 $S_1：(x-3)^2+(y+6)^2+(z-9)^2=36$

(2) 當 $t=-2$ 時，球心為 $Q_2(-1，2，1)$

所求之球面方程式為 $S_2：(x+1)^2+(y-2)^2+(z-1)^2=36$