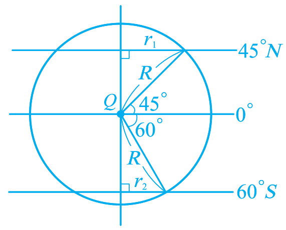
計算題（每題 25 分，共 100 分）

1. 設一地球儀赤道長 60 公分，試求：

(1) 北緯 45° 緯線長．　　(2) 南緯 60° 緯線長．

解：(1) 如右圖，設地球儀的赤道（大圓）之半徑為 R

則北緯 45° 緯線（小圓）之半徑為



$$R\sin(90^\circ-45^\circ)=\frac{\sqrt{2}}{2}R$$

故得北緯 45° 的緯線長為 $60\times\frac{\sqrt{2}}{2}=30\sqrt{2}$（公分）

(2) 又南緯 60° 緯線（小圓）之半徑為 $R\sin(90^\circ-60^\circ)=\frac{R}{2}$

故得南緯 60° 的緯線長為 $60\times\frac{1}{2}=30$（公分）

2. 設球面 S：$(x-1)^2+(y+2)^2+(z-2)^2=22$ 與直線 L：$\frac{x+2}{1}=\frac{y+3}{-2}=\frac{z-1}{2}$，

試求：

(1) 球心 Q 到 L 之距離．　　(2) 球心 Q 在 L 上之投影點．

解：(1) 球面 S：$(x-1)^2+(y+2)^2+(z-2)^2=22$

得球心 $Q(1,-2,2)$，半徑 $r=\sqrt{22}$，

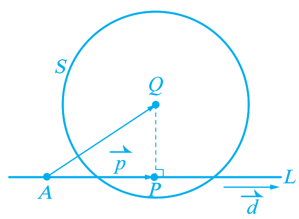
設球心 Q 在直線 L 上之投影點為 $P(x,y,z)$

令 $\vec{d}=(1,-2,2)$ 為直線 L 之一方向向量

而 $A(-2,-3,1)$ 為直線 L 上之一個定點

$\Rightarrow \overrightarrow{AQ}=(3,1,1)$

如右圖，設 $\vec{p}$ 為 $\overrightarrow{AQ}$ 在 $\vec{d}$ 方向之正射影，則



$$\vec{p}=\left(\frac{\overrightarrow{AQ}\cdot\vec{d}}{|\vec{d}|^2}\right)\vec{d}=\left(\frac{3-2+2}{1+4+4}\right)(1,-2,2)=\left(\frac{1}{3},\frac{-2}{3},\frac{2}{3}\right)$$

故得球心 Q 到 L 之距離為 $d=d(Q,L)=\sqrt{|\overrightarrow{AQ}|^2-|\vec{p}|^2}=\sqrt{11-1}=\sqrt{10}$

(2) 球心 Q 在 L 上之投影點為 $P(x,y,z)=\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA}+\vec{p}$

$$=(-2,-3,1)+\left(\frac{1}{3},\frac{-2}{3},\frac{2}{3}\right)=\left(\frac{-5}{3},\frac{-11}{3},\frac{5}{3}\right)$$

3. 設直線 L：$\dfrac{x+2}{1}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z-3}{-2}$ 與球面 S：$x^2+y^2+z^2+4x-5y-3z-4=0$，試求：

(1) 直線 L 與球面 S 之交點． (2) 直線 L 被球面 S 所截之線段長．

解：

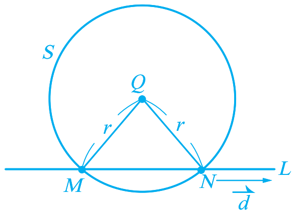
(1) 將直線 L：$\dfrac{x+2}{1}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z-3}{-2}$ 化為參數式 L：$\begin{cases} x=-2+t \\ y=1+2t \\ z=3-2t \end{cases}$，$t\in\mathbb{R}$

代入球面 S

⇨ $(-2+t)^2+(1+2t)^2+(3-2t)^2+4(-2+t)-5(1+2t)-3(3-2t)-4=0$

⇨ $3t^2-4t-4=0$ ⇨ $(t-2)(3t+2)=0$

⇨ $t=2$ 或 $-\dfrac{2}{3}$ 代回 L



故得 $M(0,5,-1)$，$N\left(\dfrac{-8}{3},\dfrac{-1}{3},\dfrac{13}{3}\right)$

(2) 令 $\vec{d}=(1,2,-2)$ 為直線 L 之一方向向量

⇨ $|\vec{d}|=\sqrt{1+4+4}=3$

故得 $\overline{MN}=|t_1-t_2|\times|\vec{d}|=\left[2-\left(-\dfrac{2}{3}\right)\right]\times 3=\dfrac{8}{3}\times 3=8$

4. 設直線 L：$\dfrac{x+1}{1}=\dfrac{y-1}{-2}=\dfrac{z-3}{-2}$ 與球面 S：$x^2+y^2+z^2=r^2$ 相切，試求球面 S 之半徑與切點之坐標．

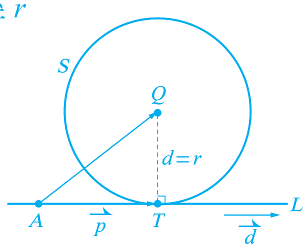
解：球面 S：$x^2+y^2+z^2=r^2$ ⇨ 得球心 $Q(0,0,0)$，半徑 r

令 $\vec{d}=(1,-2,-2)$ 為 L 之一方向向量

而 $A(-1,1,3)$ 為直線 L 上之一個定點

⇨ $\overrightarrow{AQ}=(1,-1,-3)$

如右圖，設 $\vec{p}$ 為 $\overrightarrow{AQ}$ 在 $\vec{d}$ 方向之正射影，則有



$\vec{p}=\left(\dfrac{\overrightarrow{AQ}\cdot\vec{d}}{|\vec{d}|^2}\right)\vec{d}=\left(\dfrac{1+2+6}{1+4+4}\right)(1,-2,-2)=(1,-2,-2)$

因 L 與 S 相切，故球心 Q 到直線 L 之距離等於半徑 r

故得 $r=d=d(Q,L)=\sqrt{|\overrightarrow{AQ}|^2-|\vec{p}|^2}=\sqrt{11-9}=\sqrt{2}$

而切點 T 為球心 Q 在直線 L 上之投影點

故 $T(x,y,z)=\overrightarrow{OT}=\overrightarrow{OA}+\vec{p}=(-1,1,3)+(1,-2,-2)=(0,-1,1)$