計算題（每題 25 分，共 100 分）

1. 試就 k 之值討論平面 $E：x-2y+2z=k$ 與球面 $S：x^2+y^2+z^2+4x-6y+8z-20=0$ 之關係．

解：球面 $S：x^2+y^2+z^2+4x-6y+8z-20=0$

$\Rightarrow (x^2+4x+4)+(y^2-6y+9)+(z^2+8z+16)=20+4+9+16$

$\Rightarrow (x+2)^2+(y-3)^2+(z+4)^2=7^2$ 得球心 $Q(-2,3,-4)$，半徑 $r=7$

令 $d=d(Q,E)=\dfrac{|-2-6-8-k|}{\sqrt{1+4+4}}=\dfrac{1}{3}|k+16|$

(1) 當 $d=r$，即 $\dfrac{1}{3}|k+16|=7$ 時，$k+16=\pm21$

亦即 $k=5$，-37 時，平面 E 與球面 S 相切於一點

(2) 當 $d<r$，即 $\dfrac{1}{3}|k+16|<7$ 時，$|k+16|<21 \Rightarrow -21<k+16<21$

亦即 $-37<k<5$ 時，平面 E 與球面 S 相交於一圓

(3) 當 $d>r$，即 $\dfrac{1}{3}|k+16|>7$ 時，$|k+16|>21 \Rightarrow k+16<-21$ 或 $k+16>21$

亦即 $k<-37$ 或 $k>5$ 時，平面 E 與球面 S 不相交

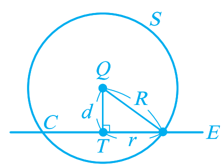
2. 試求球面 $S：(x-2)^2+(y+3)^2+(z-1)^2=64$ 與平面 $E：2x-y+2z+9=0$ 所交之圓 C 的圓心與半徑．

解：球面 $S：(x-2)^2+(y+3)^2+(z-1)^2=64$　得球心 $Q(2,-3,1)$，半徑 $R=8$

$\Rightarrow d=d(Q,E)=\dfrac{|2\cdot2-(-3)+2\cdot1+9|}{\sqrt{4+1+4}}=\dfrac{18}{3}=6<8=r$

球面 S 與平面 E 所交之圓 C 的圓心 T，即球心 Q 在平面 E 上之投影點（如下圖）

$$T：\begin{cases} x=2+\dfrac{-18}{4+1+4}\times2=-2 \\ y=-3+\dfrac{-18}{4+1+4}\times(-1)=-1 \\ z=1+\dfrac{-18}{4+1+4}\times2=-3 \end{cases} \Rightarrow T(-2,-1,-3)$$



而圓 C 的半徑為 $r=\sqrt{R^2-d^2}=\sqrt{8^2-6^2}=\sqrt{28}=2\sqrt{7}$

3. 試求過 $A(1,-2,3)$ 且與球面 $S:(x-2)^2+(y-1)^2+(z-1)^2=14$ 相切的平面方程式．

解：將 $A(1,-2,3)$ 代入 S

左式 $=(1-2)^2+(-2-1)^2+(3-1)^2=14=$ 右式 ⇨ A 在球面 S 上

故過 A 點之切面為

$E:(1-2)(x-2)+(-2-1)(y-1)+(3-1)(z-1)=14$

⇨ $-(x-2)-3(y-1)+2(z-1)=14$

故得 $E:x+3y-2z+11=0$

4. 已知一球面 $S:x^2+y^2+z^2-6x+4y-4z+16=0$ 與一平面 $E:2x-6y+3z=3$，試求：

(1) S 到 E 的最短距離．　(2) E 上離 S 最近的一點 P 之坐標．

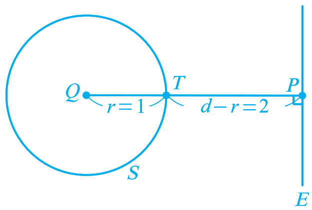
(3) S 上離 E 最近的一點 T 之坐標．

解：(1) 球面 $S:x^2+y^2+z^2-6x+4y-4z+16=0$

⇨ $(x^2-6x+9)+(y^2+4y+4)+(z^2-4z+4)=-16+9+4+4$

⇨ $(x-3)^2+(y+2)^2+(z-2)^2=1$

得球心 $Q(3,-2,2)$，半徑 $r=1$



⇨ $d=d(Q,E)=\dfrac{|2\cdot3-6\cdot(-2)+3\cdot2-3|}{\sqrt{4+36+9}}$

$=\dfrac{21}{7}=3>1=r$

故得球面 S 到平面 E 之最短距離為 $d-r=3-1=2$

(2) 平面 E 之上離球面 S 最近之 P 點即球心 Q 在平面 E 上之投影點（如上圖）

$$P:\begin{cases} x=3+\dfrac{-21}{4+36+9}\times2=\dfrac{15}{7} \\ y=-2+\dfrac{-21}{4+36+9}\times(-6)=\dfrac{4}{7} \\ z=2+\dfrac{-21}{4+36+9}\times3=\dfrac{5}{7}\end{cases} ⇨ P\left(\dfrac{15}{7},\dfrac{4}{7},\dfrac{5}{7}\right)$$

(3) 故球面 S 上距平面 E 最短距離之 T 點即 Q，P 之 $1:2$ 內分點（如上圖）

$$T\left(\frac{1\cdot\frac{15}{7}+2\cdot3}{1+2},\frac{1\cdot\frac{4}{7}+2\cdot(-2)}{1+2},\frac{1\cdot\frac{5}{7}+2\cdot2}{1+2}\right)=\left(\frac{19}{7},-\frac{8}{7},\frac{11}{7}\right)$$