一、多重選擇題（共 20 分）

下列哪些點位在單位球上？

(A) $(0,-1,0)$ (B) $(\frac{1}{2},0,-\frac{\sqrt{3}}{2})$ (C) $(\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}})$

(D) $(-\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}},-\frac{1}{\sqrt{3}})$ (E) $(1,1,-1)$.

解：設單位球為 $S: x^2+y^2+z^2=1$，則球心 $Q(0,0,0)$，半徑 $r=1$

(A) 設 $A(0,-1,0) \Rightarrow \overline{AQ}^2=0^2+(-1)^2+0^2=1^2=r^2 \Rightarrow A\in S$

(B) 設 $B(\frac{1}{2},0,-\frac{\sqrt{3}}{2}) \Rightarrow \overline{BQ}^2=(\frac{1}{2})^2+0^2+(-\frac{\sqrt{3}}{2})^2=1=r^2 \Rightarrow B\in S$

(C) 設 $C(\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}) \Rightarrow \overline{CQ}^2=(\frac{1}{\sqrt{2}})^2+(-\frac{1}{\sqrt{2}})^2+(\frac{1}{\sqrt{2}})^2=\frac{3}{2}$

$\neq 1=r^2 \Rightarrow C\notin S$

(D) 設 $D(-\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}},-\frac{1}{\sqrt{3}}) \Rightarrow \overline{DQ}^2=(-\frac{1}{\sqrt{3}})^2+(\frac{1}{\sqrt{3}})^2+(-\frac{1}{\sqrt{3}})^2$

$=1=r^2 \Rightarrow D\in S$

(E) 設 $E(1,1,-1) \Rightarrow \overline{EQ}^2=1^2+1^2+(-1)^2=3\neq 1=r^2 \Rightarrow E\notin S$

故(A)(B)(D)為正確

二、計算題（每題 20 分，共 80 分）

1. 設 $S:(x-2)^2+y^2+(z+5)^2=35$，試求下列諸點是在 S 之內部、S 上或 S 之外部．

(1) $A(0,0,0)$． (2) $B(-2,-3,-1)$． (3) $C(5,-1,-10)$．

解：$S:(x-2)^2+y^2+(z+5)^2=35 \Rightarrow$ 球心 $Q(2,0,-5)$，半徑 $r=\sqrt{35}$

(1) $A(0,0,0) \Rightarrow \overline{AQ}^2=(0-2)^2+0^2+(0+5)^2=4+0+25$

$=29<35=r^2 \Rightarrow A$ 在球 S 內部

(2) $B(-2,-3,-1) \Rightarrow \overline{BQ}^2=(-4)^2+(-3)^2+4^2=16+9+16$

$=41>35=r^2 \Rightarrow B$ 在球 S 外部

(3) $C(5,-1,-10) \Rightarrow \overline{CQ}^2=(5-2)^2+(-1)^2+(-10+5)^2=9+1+25$

$=35=r^2 \Rightarrow C$ 在球 S 上

2. 試求通過原點 O 與 $A(3,-1,2)$，$B(-2,0,-1)$，$C(-1,2,-1)$ 的球面方程式．

解：因過原點 $O(0,0,0)$，故可設所求球面方程式為

$S: x^2+y^2+z^2+dx+ey+fz=0 \Rightarrow dx+ey+fz=-(x^2+y^2+z^2)$

$A(3,-1,2)\in S \Rightarrow 3d-e+2f=-(9+1+4)=-14$ ……①

$B(-2,0,-1)\in S \Rightarrow -2d-f=-(4+0+1)=-5$ ………②

$C(-1,2,-1)\in S \Rightarrow -d+2e-f=-(1+4+1)=-6$ ……③

①＋②＋③得 $e=-25$……④，代入①，③

$3d+2f=-14+e=-14-25=-39$ ……………………………⑤

$-2d-2f=-12-4e=-12+100=88$ …………………………⑥

⑤＋⑥得 $d=49$ ……………………………………………⑦

代入②得 $f=-2d+5=-98+5=-93$

故得球面方程式為 $S: x^2+y^2+z^2+49x-25y-93z=0$

3. 試求以 $A(1,3,-1)$，$B(-5,-3,7)$ 為直徑兩端點的球面之一般式與標準式．

解：$A(1,3,-1)$，$B(-5,-3,7)$ 為所求的球面 S 直徑之兩端點，

則球面 S 為 $(x-1)(x+5)+(y-3)(y+3)+(z+1)(z-7)=0$

$\Rightarrow x^2+4x-5+y^2-9+z^2-6z-7=0 \Rightarrow x^2+y^2+z^2+4x-6z-21=0$

$\Rightarrow (x^2+4x+4)+y^2+(z^2-6z+9)=21+4+9$

$\Rightarrow (x+2)^2+y^2+(z-3)^2=34$

故得球面之一般式為 $S: x^2+y^2+z^2+4x-6z-21=0$

標準式為 $S: (x+2)^2+y^2+(z-3)^2=34$

4. 設 $k\in\mathbb{R}$，若方程式 $x^2+y^2+z^2+2kx-6ky+4kz+4k^2+2k+8=0$ 的圖形是一個點，試求實數 k 之值與此點之坐標．

解：$x^2+y^2+z^2+2kx-6ky+4kz+4k^2+2k+8=0$

$\Rightarrow (x^2+2kx+k^2)+[y^2-6ky+(3k)^2]+[z^2+4kz+(2k)^2]$

$=-4k^2-2k-8+k^2+9k^2+4k^2$

$\Rightarrow (x+k)^2+(y-3k)^2+(z+2k)^2=10k^2-2k-8$

方程式 $x^2+y^2+z^2+2kx-9ky+4kz+k^2+5k-8=0$ 的圖形是一個點 $(-k,3k,-2k)$

$\Rightarrow 10k^2-2k-8=0 \Rightarrow 5k^2-k-4=0 \Rightarrow (k-1)(5k+4)=0 \Rightarrow k=1$ 或 $-\dfrac{4}{5}$

(1) 當 $k=1$ 時，原方程式圖形為一點 $(-k,3k,-2k)=(-1,3,-2)$

(2) 當 $k=-\dfrac{4}{5}$ 時，原方程式圖形為一點 $(-k,3k,-2k)=(\dfrac{4}{5},-\dfrac{12}{5},\dfrac{8}{5})$