計算題（每題 20 分，共 100 分）

1. 自 $P(-3,5)$ 作圓 $C：x^2+y^2+2x-4y-4=0$ 的切線，試求切線方程式．

解：$C：x^2+y^2+2x-4y-4=0 \Rightarrow (x+1)^2+(y-2)^2=4+1+4=9=3^2$

可得圓心為 $Q(-1,2)$，半徑 $r=3$，將 $P(-3,5)$ 代入 C

$\Rightarrow$ 左式 $=(-3+1)^2+(5-2)^2=4+9=13>9=$ 右式

$\Rightarrow P(-3,5)$ 在圓 C 外，過 P 點有兩切線，設所求切線 L 之斜率為 m，則

$L：y-2=m(x+1)\pm\sqrt{9m^2+9}$，又 $P(-3,5)\in L$

$\Rightarrow 5-2=m(-3+1)\pm\sqrt{9m^2+9} \Rightarrow (2m+3)^2=(\pm\sqrt{9m^2+9})^2$

$\Rightarrow 4m^2+12m+9=9m^2+9 \Rightarrow 5m^2-12m=0$

$\Rightarrow m=0$ 或 $\dfrac{12}{5}$

故得 $L_1：y=5$ 與 $L_2：12x-5y+61=0$

2. 承 1.，試求第 1. 題中之切點坐標．

解：切線 $L_1：y=5$ 與圓 C 之切點 T_1 即圓心 $Q(-1,2)$ 在 L_1 上之投影點

$$\Rightarrow T_1：\begin{cases} x=-1+\dfrac{-(0+2-5)}{0^2+1^2}\times 0=-1 \\ y=2+\dfrac{-(0+2-5)}{0^2+1^2}\times 1=5 \end{cases}$$

切線 $L_2：12x-5y+61=0$ 與圓 C 之切點 T_2

即圓心 $Q(-1,2)$ 在 L_2 上之投影點

$$\Rightarrow T_2：\begin{cases} x=-1+\dfrac{-(-12-10+61)}{12^2+(-5)^2}\times 12=-\dfrac{49}{13} \\ y=2+\dfrac{-(-12-10+61)}{12^2+(-5)^2}\times(-5)=\dfrac{41}{13} \end{cases}$$

故得 $T_1(-1,5)$，$T_2(-\dfrac{49}{13},\dfrac{41}{13})$

3. 試求斜率為 $-\dfrac{3}{4}$ 且與圓 C：$(x-5)^2+(y+2)^2=9$ 相切的直線方程式．

解：C：$(x-5)^2+(y+2)^2=9$，可得圓心為 $Q(5,-2)$，半徑 $r=3$

設切線為 L：$3x+4y=k$，由 $d(Q,L)=r$ 可得

$$d(Q,L)=\frac{|3\cdot 5+4\cdot(-2)-k|}{\sqrt{3^2+4^2}}=\frac{|k-7|}{5}=3$$

$\Rightarrow |k-7|=15 \Rightarrow k-7=\pm 15$

$\Rightarrow k=22，-8$

故得 L_1：$3x+4y=22$ 與 L_2：$3x+4y=-8$

4. 試求與 L：$x-2y=1$ 垂直且與圓 C：$x^2+y^2-4x+6y-3=0$ 相切的切線方程式．

解：C：$x^2+y^2-4x+6y-3=0 \Rightarrow (x-2)^2+(y+3)^2=3+4+9=16$

可得圓心為 $Q(2,-3)$，半徑 $r=4$

設所求切線為 M：$2x+y=k$，則 $M\perp L$，由 $d(Q,M)=r$ 可得

$$d(Q,M)=\frac{|2\cdot 2+(-3)-k|}{\sqrt{2^2+1^2}}=\frac{|k-1|}{\sqrt{5}}=4$$

$\Rightarrow |k-1|=4\sqrt{5} \Rightarrow k-1=\pm 4\sqrt{5}$

$\Rightarrow k=1\pm 4\sqrt{5}$

故得 M_1：$2x+y=1+4\sqrt{5}$ 與 M_2：$2x+y=1-4\sqrt{5}$

5. 設圓 C：$x^2+y^2+6x-10y-2=0$，過 $P(1,-1)$ 作 C 之切線，切點為 A，B，試求 $\triangle PAB$ 的外接圓方程式．

解：C：$x^2+y^2+6x-10y-2=0 \Rightarrow (x+3)^2+(y-5)^2=2+9+25=36$

可得圓心為 $Q(-3,5)$，半徑 $r=6$，將 $P(1,-1)$ 代入 C

$\Rightarrow P(1,-1)$ 在圓 C 外

因 $\angle PAQ=\angle PBQ=90^\circ$，

故 $\triangle PAB$ 的外接圓即以 $\overline{PQ}$ 為直徑之圓

$(x-1)(x+3)+(y+1)(y-5)=0$

$\Rightarrow x^2+2x-3+y^2-4y-5=0$

故得方程式為 $x^2+y^2+2x-4y-8=0$