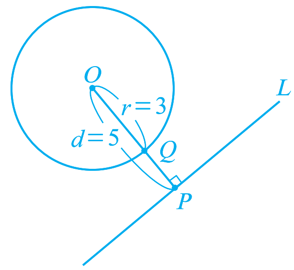
計算題（每題 20 分，共 100 分）

1. 設 P 為直線 $L：3x-4y=25$ 上任意點，而 Q 為圓 $C：x^2+y^2=9$ 上任意點，試求：
(1) 線段 PQ 長的最小值．　(2) 此時之 P 點與 Q 點之坐標．

解：(1) 圓 $C：x^2+y^2=9$ 之圓心為 $O(0,0)$，半徑 $r=3$



令 $d=d(O,L)=\dfrac{|0-0-25|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}}=\dfrac{25}{5}=5>3=r$

即 L 與 C 不相交，$\overline{PQ}=d-r=5-3=2$

故所求之最小值為 2

(2) 此時，P 點為圓心 $O(0,0)$ 在 L 上之投影點

$$\Rightarrow P：\begin{cases} x=0+\dfrac{-(-25)}{3^2+(-4)^2}\times 3=3 \\ y=0+\dfrac{-(-25)}{3^2+(-4)^2}\times(-4)=-4 \end{cases}$$

而 Q 點為 $\overline{OQ}：\overline{QP}=3：2$ 之分點

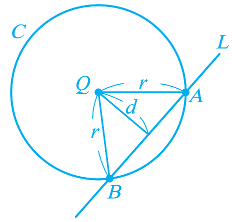
$$\Rightarrow Q\left(\frac{3\cdot 3+2\cdot 0}{3+2},\ \frac{3\cdot(-4)+2\cdot 0}{3+2}\right)=\left(\frac{9}{5},\ -\frac{12}{5}\right)$$

故得 $P(3,-4)$，$Q\left(\dfrac{9}{5},-\dfrac{12}{5}\right)$

2. (1) 試求直線 $L：3x-4y=3$ 被圓 $C：x^2+y^2-4x+6y+1=0$ 所截得之弦長．
(2) 試求 $P(3,-4)$ 到圓 $C：x^2+y^2-4x+6y+23=0$ 上切點 T 之距離．

解：(1) $C：x^2+y^2-4x+6y+1=0\Rightarrow(x-2)^2+(y+3)^2=12$

可得圓心為 $Q(2,-3)$，半徑 $r=2\sqrt{3}$



令 $d=d(Q,L)=\dfrac{|3\cdot 2-4\cdot(-3)-3|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}}$

$=\dfrac{15}{5}=3<2\sqrt{3}=r$

故得 $\overline{AB}=2\sqrt{r^2-d^2}=2\sqrt{12-9}=2\sqrt{3}$

(2) $\overline{PT}=\sqrt{3^2+(-4)^2-4\cdot 3+6\cdot(-4)+23}$

$=\sqrt{9+16-12-24+23}=\sqrt{12}=2\sqrt{3}$

3. 一圓通過點 A（-2，4）且與直線 L：$3x-y+2=0$ 相切於點 B（2，8），試求此圓方程式．

解：過圓心 Q 與切點 B 之直線為 M：$x+3y=26$

又 $m_{\overline{AB}}=\dfrac{8-4}{2+2}=1$，$\overline{AB}$ 中點為 R（$\dfrac{-2+2}{2}$，$\dfrac{4+8}{2}$）＝（0，6）

⇨ N：$x+y=6$ 為 $\overline{AB}$ 中垂線（亦過圓心 Q）

由 M，N 解得交點 Q（-4，10）即為圓心

又 $r^2=\overline{QA}^2=\overline{QB}^2=(-4+2)^2+(10-4)^2=4+36=40$

故得圓方程式為 $(x+4)^2+(y-10)^2=40$

4. 試判斷下列各組直線 L 與圓 C 的關係（相交於兩點、相切或不相交）：

(1) L：$x-2y=4$，C：$(x-4)^2+(y+5)^2=16$．

(2) L：$x+y=3$，C：$x^2+y^2+4x-6y+7=0$．

解：(1) C：$(x-4)^2+(y+5)^2=16$ 可得圓心為 Q（4，-5），半徑 $r=4$

令 $d=d(Q,L)=\dfrac{|4-2\cdot(-5)-4|}{\sqrt{1^2+(-2)^2}}=\dfrac{10}{\sqrt{5}}=2\sqrt{5}>4=r$

故 L 與 C 不相交

(2) C：$x^2+y^2+4x-6y+7=0$ ⇨ $(x+2)^2+(y-3)^2=-7+4+9=6$

得圓心為 Q（-2，3），半徑 $r=\sqrt{6}$

令 $d=d(Q,L)=\dfrac{|-2+3-3|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\dfrac{2}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}<\sqrt{6}=r$

故 L 與 C 交於相異兩點

5. (1) 試求過圓 C：$x^2+y^2=100$ 上一點 P（-6，8）的切線方程式．

(2) 試求過點 P（1，-2）且與圓 C：$x^2+y^2-4x+10y+19=0$ 相切的直線方程式．

解：(1) 過圓 C：$x^2+y^2=100$ 上一點 P（-6，8）的切線方程式為

$(-6-0)(x-0)+(8-0)(y-0)=100$ ⇨ $-6x+8y=100$

故得 $3x-4y+50=0$

(2) 將 P（1，-2）代入C ⇨ 左式 $=1^2+(-2)^2-4\cdot 1+10\cdot(-2)+19$

$=1+4-4-20+19=0=$ 右式

$\therefore P(1,-2)\in C$，即 P 為圓 C 上一點

$1\cdot x+(-2)\cdot y-2(x+1)+5(y-2)+19=0$

⇨ $x-2y-2x-2+5y-10+19=0$

故所求切線方程式為 $x-3y=7$