計算題（每題 20 分，共 100 分）

1. (1) 試求圓心為 $Q(-2,-5)$ 且過 $P(4,3)$ 的圓之一般式．
   (2) 試求一直徑兩端點為 $A(-1,2)$，$B(-5,-4)$ 之圓的圓心與半徑．

解：(1) 設半徑為 r，則 $r^2=\overline{PQ}^2=(4+2)^2+(3+5)^2=36+64=100$

$\Rightarrow (x+2)^2+(y+5)^2=100$

$\Rightarrow x^2+4x+4+y^2+10y+25-100=0$

故得 $x^2+y^2+4x+10y-71=0$

(2) 設 $P(x,y)$ 為所求圓 C 上之任意點，則

$\overrightarrow{PA}=(x+1,y-2)$，$\overrightarrow{PB}=(x+5,y+4)$

由 $\angle APB=90^\circ \Rightarrow \overrightarrow{PA}\perp\overrightarrow{PB} \Rightarrow \overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}=0$

$\Rightarrow (x+1)(x+5)+(y-2)(y+4)=0$

$\Rightarrow x^2+6x+5+y^2+2y-8=0$

$\Rightarrow (x^2+6x+9)+(y^2+2y+1)=3+9+1$

$\Rightarrow (x+3)^2+(y+1)^2=13$

故得圓心為 $Q(-3,-1)$，半徑 $r=\sqrt{13}$

2. (1) 試判斷方程式 $2x^2+2y^2+x-y+5=0$ 之圖形．
   (2) 試判斷方程式 $x^2+y^2-4x+6y+13=0$ 之圖形．

解：(1) $2x^2+2y^2+x-y+5=0$

$\Rightarrow 2\left[x^2+2\cdot x\cdot\frac{1}{4}+\left(\frac{1}{4}\right)^2\right]+2\left[y^2-2\cdot y\cdot\frac{1}{4}+\left(\frac{1}{4}\right)^2\right]=-5+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}$

$\Rightarrow 2\left(x+\frac{1}{4}\right)^2+2\left(y-\frac{1}{4}\right)^2=-\frac{19}{4}<0 \Rightarrow x，y\notin\mathbb{R}$

故方程式 $2x^2+2y^2+x-y+5=0$ 之圖形不存在（虛圓）

(2) $x^2+y^2-4x+6y+13=0$

$\Rightarrow (x^2-4x+4)+(y^2+6y+9)=-13+4+9$

$\Rightarrow (x-2)^2+(y+3)^2=0 \Rightarrow (x,y)=(2,-3)$

故得方程式 $x^2+y^2-4x+6y+13=0$ 之圖形為一點 $(2,-3)$

3. 試求圓心在 $L：x+y-1=0$ 上且過 $A(-2,-5)$，$B(-4,3)$ 的圓方程式．

解：設圓心為 $Q(x,1-x)\in L$，由 $\overline{QA}^2=\overline{QB}^2$

$\Rightarrow (x+2)^2+(1-x+5)^2=(x+4)^2+(1-x-3)^2$

$\Rightarrow x^2+4x+4+x^2-12x+36=x^2+8x+16+x^2+4x+4$

$\Rightarrow 8x+4x-4x+12x=4+36-16-4$

$\Rightarrow 20x=20\Rightarrow x=1$

故圓心為 $Q(1,0)$，半徑平方為 $\overline{QA}^2=(1+2)^2+(0+5)^2=9+25=34$

故所求之圓方程式為 $(x-1)^2+y^2=34$

4. 一圓通過 $P(-2,5)$ 且與 x 軸相切，若其半徑為 5，試求此圓方程式．

解：因與 x 軸相切且半徑為 5，而 $P(-2,5)$ 在第二象限

故可設圓心為 $Q(h,5)$，由 $\overline{QP}^2=r^2$

$\Rightarrow (h+2)^2+(5-5)^2=5^2\Rightarrow h^2+4h+4+0-25=0$

$\Rightarrow h^2+4h-21=0\Rightarrow (h+7)(h-3)=0$

$\Rightarrow x=-7$ 或 3

故所求之圓方程式為 $(x+7)^2+(y-5)^2=25$ 與 $(x-3)^2+(y-5)^2=25$

5. 試求到兩定點 $A(2,-1)$，$B(-3,4)$ 之距離比為 $3:2$ 的所有點所形成之圓的圓心與半徑．

解：設 $P(x,y)$ 為所求圓 C 上之任意點，則

$\overline{PA}:\overline{PB}=3:2\Rightarrow \overline{PA}^2:\overline{PB}^2=9:4\Rightarrow 4\overline{PA}^2=9\overline{PB}^2$

$\Rightarrow 4[(x-2)^2+(y+1)^2]=9[(x+3)^2+(y-4)^2]$

$\Rightarrow 9(x^2+6x+9+y^2-8y+16)-4(x^2-4x+4+y^2+2y+1)=0$

$\Rightarrow 9x^2+54x+81+9y^2-72y+144-4x^2+16x-16-4y^2-8y-4=0$

$\Rightarrow 5x^2+70x+5y^2-80y+205=0$

$\Rightarrow 5(x^2+14x+7^2)+5(y^2-16y+8^2)=-205+245+320=360$

$\Rightarrow (x+7)^2+(y-8)^2=72$

故得圓心為 $Q(-7,8)$，半徑為 $r=\sqrt{72}=6\sqrt{2}$