計算題（每題 25 分，共 100 分）

1. 試求點 P（1，2，3）與 y 軸所決定的平面方程式．

解：設 O（0，0，0）$\in y$ 軸，則 $\overrightarrow{OP}=(1,2,3)$

又 $\vec{d}=(0,1,0)$ 為 y 軸之一方向向量

$\Rightarrow \overrightarrow{OP}\times\vec{d}=(-3,0,1)=-(3,0,-1)$

$$\begin{matrix} 2 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{matrix}$$

令 $\vec{n}=(3,0,-1)$ 為所求平面 E 之一法向量

可設 $E：3x-z=k$，又 P（1，2，3）$\in E$，可得 $k=3-3=0$

故得 $E：3x-z=0$

2. (1) 判斷直線 $L：\dfrac{x+1}{1}=\dfrac{y-2}{4}=\dfrac{z+3}{-2}$ 與平面 $E：x-2y+z=4$ 之關係．

(2) 若 L 與 E 相交，試求交點．

解：(1) 設 $\vec{d}=(1,4,-2)$ 為直線 L 之一方向向量，

而 $\vec{n}=(1,-2,1)$ 為平面 E 之一方向向量

$\vec{d}\cdot\vec{n}=1\cdot1+4\cdot(-2)+(-2)\cdot1=1-8-2=-9\neq0$

故直線 L 與平面 E 交於一點

(2) 將直線 L 化成標準參數式 $L：\begin{cases} x=-1+t \\ y=2+4t \\ z=-3-2t \end{cases}$，代入 E

$\Rightarrow (-1+t)-2(2+4t)+(-3-2t)=4$

$\Rightarrow -1+t-4-8t-3-2t=4 \Rightarrow -9t=12$

得 $t=-\dfrac{4}{3}$，代回 $L：\begin{cases} x=-1+\left(-\dfrac{4}{3}\right)=-\dfrac{7}{3} \\ y=2+4\cdot\left(-\dfrac{4}{3}\right)=-\dfrac{10}{3} \\ z=-3-2\cdot\left(-\dfrac{4}{3}\right)=-\dfrac{1}{3} \end{cases}$

即 L 與 E 交於 $\left(-\dfrac{7}{3},-\dfrac{10}{3},-\dfrac{1}{3}\right)$

3. (1) 試求 $P(-2,5,6)$ 在直線 $L:\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+1}{-1}=\dfrac{z-3}{-2}$ 上之投影點．

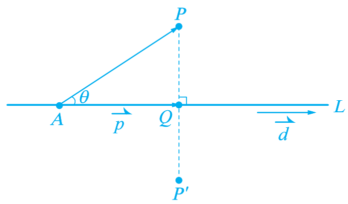
(2) 承(1)，試求 P 相對於 L 之對稱點．

解：(1) 設 P 在直線 L 上之投影點為 $Q(x,y,z)$

令 $\vec{d}=(2,-1,-2)$ 為直線 L 之一方向向量，

而 $A(1,-1,3)$ 為直線 L 上之一個定點

$\Rightarrow \overrightarrow{AP}=(-3,6,3)$



如右圖，設 $\vec{p}$ 為 $\overrightarrow{AP}$ 在 $\vec{d}$ 方向之正射影，則有

$$\vec{p}=\left(\frac{\overrightarrow{AP}\cdot\vec{d}}{|\vec{d}|^2}\right)\vec{d}=\left(\frac{-6-6-6}{4+1+4}\right)(2,-1,-2)=(-4,2,4)$$

$\Rightarrow Q(x,y,z)=\overrightarrow{OQ}=\overrightarrow{OA}+\vec{p}$

$=(1,-1,3)+(-4,2,4)=(-3,1,7)$

(2) 如右上圖，設 P 相對於 L 之對稱點為 $P'(x,y,z)$

則投影點 Q 為 $\overline{PP'}$ 之中點

$$\Rightarrow Q(-3,1,7)=\left(\frac{-2+x}{2},\frac{5+y}{2},\frac{6+z}{2}\right)$$

$\Rightarrow P'(x,y,z)=(-6+2,2-5,14-6)=(-4,-3,8)$

4. 試求點 $A(-1,2,-2)$ 與直線 $L:\begin{cases}x-2y+2z=0\\x+y-3z=6\end{cases}$ 所決定的平面方程式．

解：過直線 L 之所有平面可表為

$(x-2y+2z)+k(x+y-3z-6)=0\ (k\in\mathbb{R})$

又所求之平面 E 過 $A(-1,2,-2)$

$\Rightarrow (-1-4-4)+k(-1+2+6-6)=0$

$\Rightarrow k=9$

故所求之平面方程式為

$E:(x-2y+2z)+9(x+y-3z-6)=0$

$\Rightarrow 10x+7y-25z=54$