計算題（每題 25 分，共 100 分）

1. 試求通過空間中 $A(3,-1,5)$，$B(2,1,-7)$ 兩點的直線方程式，分別以下列方式表示．

(1) 參數式．　(2) 對稱式．　(3) 兩面式．

解：(1) $\overrightarrow{AB}=(-1,2,-12)=-(1,-2,12)$

令 $\vec{d}=(1,-2,12)$ 為直線 AB 之一方向向量，又直線 AB 過 $A(3,-1,5)$

故所求直線 AB 之參數式為 $\overleftrightarrow{AB}:\begin{cases}x=3+t\\y=-1-2t\\z=5+12t\end{cases}$，$t\in\mathbb{R}$（不唯一）

(2) 由(1)，令 $\vec{d}=(1,-2,12)$ 為直線 AB 之一方向向量

又直線 AB 過 $A(3,-1,5)$

故所求直線 AB 之對稱式為 $\overleftrightarrow{AB}:\dfrac{x-3}{1}=\dfrac{y+1}{-2}=\dfrac{z-5}{12}$（不唯一）

(3) 由(2)，$E_1:\dfrac{x-3}{1}=\dfrac{y+1}{-2}\Rightarrow -2x+6=y+1$

$\Rightarrow 2x+y=5$ 為過直線 AB 之一平面

$E_2:\dfrac{y+1}{-2}=\dfrac{z-5}{12}\Rightarrow 12y+12=-2z+10$

$\Rightarrow 6y+z=-1$ 為過直線 AB 之另一平面

故所求直線 AB 之兩面式為 $\overleftrightarrow{AB}:\begin{cases}E_1:2x+y=5\\E_2:6y+z=-1\end{cases}$（不唯一）

2. 試求空間中兩直線 $L_1:\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+1}{1}=\dfrac{z-3}{-2}$，$L_2:\dfrac{x-3}{1}=\dfrac{y-5}{-2}=\dfrac{z+3}{1}$ 的交點．

解：設 $\vec{d_1}=(2,1,-2)$，$\vec{d_2}=(1,-2,1)$ 分別為 L_1，L_2 之一方向向量

因 $\vec{d_1}$，$\vec{d_2}$ 不平行，故 L_1，L_2 可能相交或歪斜

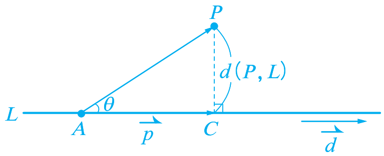
化參數式 $L_1:\begin{cases}x=1+2t\\y=-1+t\\z=3-2t\end{cases}$，$L_2:\begin{cases}x=3+s\\y=5-2s\\z=-3+s\end{cases}$，令 $x=x$，$y=y\Rightarrow\begin{cases}1+2t=3+s\\-1+t=5-2s\end{cases}$

解得 $t=2$，$s=2$，代入 L_1，L_2，皆得 $z=-1$，即 L_1，L_2 相交於一點

又 $x=5$，$y=1$，故得 L_1，L_2 相交於一點 $(5,1,-1)$

3. 試求 P（3，-2，1）到直線 L：$\dfrac{x+1}{2}=\dfrac{y-2}{-1}=\dfrac{z-3}{1}$ 的距離．

解：令 $\vec{d}=$（2，-1，1）為直線 L 之一方向向量



而 A（-1，2，3）為直線 L 上之一個定點

而 $\overrightarrow{AP}=$（4，-4，-2）

$\Rightarrow |\overrightarrow{AP}|^2=4^2+(-4)^2+(-2)^2=16+16+4=36$

設 $\vec{p}$ 為 $\overrightarrow{AP}$ 在 $\vec{d}$ 方向的正射影，則有

$$|\vec{p}|^2=\frac{(\overrightarrow{AP}\cdot\vec{d})^2}{|\vec{d}|^2}=\frac{(8+4-2)^2}{4+1+1}=\frac{100}{6}=\frac{50}{3}$$

由畢氏定理可得 $d(P, L)=\sqrt{|\overrightarrow{AP}|^2-|\vec{p}|^2}=\sqrt{36-\dfrac{50}{3}}$

$$=\sqrt{\frac{58}{3}}=\frac{\sqrt{174}}{3}$$

4. 試求 L_1：$\dfrac{x-3}{2}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z-2}{1}$，$L_2$：$\dfrac{4-x}{2}=\dfrac{y+4}{1}=\dfrac{z-1}{2}$ 兩歪斜線的距離．

解：

$$\begin{array}{cccc} 2 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & -2 & 1 \end{array}$$

將 L_2 化為標準對稱式 $\Rightarrow L_2$：$\dfrac{x-4}{-2}=\dfrac{y+4}{1}=\dfrac{z-1}{2}$

設 $\vec{d_1}=$（2，2，1），$\vec{d_2}=$（-2，1，2）

分別為 L_1，L_2 之一方向向量

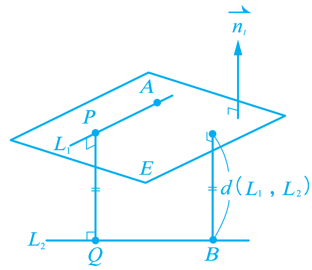
$\Rightarrow \vec{d_1}\times\vec{d_2}=$（3，$-6$，6）$=3$（1，$-2$，2）

令 $\vec{n}=$（1，-2，2）為包含 L_1 且平行 L_2 之平面 E 之一法向量

可設 E：$x-2y+2z=k$，又 A（3，1，2）$\in E$

$\Rightarrow k=3-2+4=5$，得 E：$x-2y+2z=5$

令 B（4，-4，1）$\in L_2$



$\Rightarrow d(L_1, L_2)=d(B, E)$

$$=\frac{|4-2\cdot(-4)+2\cdot1-5|}{\sqrt{1+4+4}}$$

$$=\frac{9}{3}=3$$