高中數學(三) 隨堂評量卷　第 12 回　範圍 2－4　平面方程式(Ⅱ)　班級：______ 座號：______ 姓名：______

計算題（每題 25 分，共 100 分）

1. 試求通過點 $A(1,-2,1)$ 且與 $E_1: x+2y-z+1=0$ 及 $E_2: x-y+z=1$ 兩平面皆垂直之平面方程式．

解：令 $\vec{n_1}=(1,2,-1)$，$\vec{n_2}=(1,-1,1)$ 分別為 E_1 與 E_2 之一法向量

如右圖，$\vec{n_1}\times\vec{n_2}=(1,-2,-3)$

$$\begin{array}{cccc} 2 & -1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \end{array}$$

取 $\vec{n}=(1,-2,-3)$ 為所求平面 E 之一法向量

設 $E: x-2y-3z=k$，又 $A(1,-2,1)\in E$

$\Rightarrow k=1+4-3=2$

故得 $E: x-2y-3z=2$

2. 設平面 E 含 $3x+y=3$ 及 $y-3z=4$ 之交線且與平面 $3x-3y-4z+5=0$ 垂直，試求 E 之方程式．

解：可設 $E: (3x+y-3)+k(y-3z-4)=0$

$\Rightarrow 3x+(1+k)y-3kz+(-3-4k)=0$

取 $\vec{n_1}=(3,1+k,-3k)$ 為 E 之一法向量

令 $\vec{n_2}=(3,-3,-4)$ 為 $F: 3x-3y-4z+5=0$ 之一法向量

$E\perp F \Rightarrow \vec{n_1}\perp\vec{n_2} \Rightarrow \vec{n_1}\cdot\vec{n_2}=0$

$\Rightarrow 3\cdot 3+(1+k)\cdot(-3)+(-3k)\cdot(-4)=0$

$\Rightarrow 9-3-3k+12k=0 \Rightarrow k=-\dfrac{2}{3}$

$E: (3x+y-3)-\dfrac{2}{3}(y-3z-4)=0$

$\Rightarrow 3(3x+y-3)-2(y-3z-4)=0$

故得 $E: 9x+y+6z-1=0$

3. 試求連接 A（4，−3，−2），B（−6，5，−4）兩點之線段的垂直平分面（中垂面）之方程式．

解：設 M（x，y，z）為 $\overline{AB}$ 中點，

則 $M\left(\dfrac{4-6}{2},\dfrac{-3+5}{2},\dfrac{-2-4}{2}\right)=(-1,1,-3)$

$\overrightarrow{AB}=(-10,8,-2)=-2(5,-4,1)$

取 $\vec{n}=(5,-4,1)$ 為所求平面 E 之一法向量

設 $E：5x-4y+z=k$，又 $M(-1,1,-3)\in E$

⇨ $k=-5-4-3=-12$

故得 $E：5x-4y+z=-12$

4. $\triangle ABC$ 之三頂點分別為 A（−2，3，6），B（1，−3，8），C（x，y，0），試求：

(1) $\triangle ABC$ 周長之最小值．　　(2) 使 $\triangle ABC$ 周長為最小值之 C 點坐標．

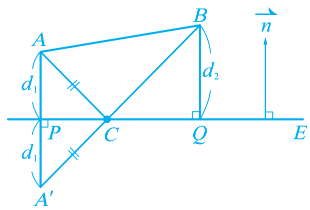
解：(1) C 點在 xy 平面（$E：z=0$）上

A，B在 xy 平面之同側且 $\overline{AB}=\sqrt{3^2+(-6)^2+2^2}=7$

設 A 相對於 xy 平面之對稱點為 A'（−2，3，−6）

令 $d_1=d(A,E)=d(A',E)=6$，

$d_2=d(B,E)=8$



當 C 位在 $\overline{A'B}$ 與 E 之交點時

可使 $\overline{AC}+\overline{BC}=\overline{A'C}+\overline{CB}=\overline{A'B}$ 為最小值

此時 $\triangle ABC$ 周長亦為最小值

而 $\overline{A'B}=\sqrt{(-2-1)^2+(3+3)^2+(-6-8)^2}=\sqrt{9+36+196}=\sqrt{241}$

故 $\triangle ABC$ 之最小周長為 $\overline{AB}+\overline{A'B}=7+\sqrt{241}$

(2) 當 C 位在 $\overline{A'B}$ 與 E 之交點時，可使 $\overline{AC}+\overline{BC}=\overline{A'C}+\overline{CB}=\overline{A'B}$ 為最小值

$\triangle ABC$ 周長亦為最小值，此時 $\triangle A'PC\sim\triangle BQC$

⇨ $\overline{A'C}：\overline{BC}=\overline{A'P}：\overline{BQ}=d_1：d_2=6：8=3：4$

$\therefore C\left(\dfrac{3\cdot1+4\cdot(-2)}{3+4},\dfrac{3\cdot(-3)+4\cdot3}{3+4},\dfrac{3\cdot8+4\cdot(-6)}{3+4}\right)$

$=\left(-\dfrac{5}{7},\dfrac{3}{7},0\right)$