班級：＿＿＿＿ 座號：＿＿＿＿

姓名：＿＿＿＿＿＿＿＿

計算題（每題 25 分，共 100 分）

1. 試求過 A（3，−2，4），B（0，−1，3），C（−1，2，5）三點之平面方程式．

解：$\overrightarrow{AB}=(-3,1,-1)$，$\overrightarrow{AC}=(-4,4,1)$，顯然 $\overrightarrow{AB}$ 不平行 $\overrightarrow{AC}$

即 A，B，C 三點不共線，故可決定一平面

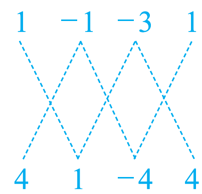
如右圖，$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=(5,7,-8)$

取 $\vec{n}=(5,7,-8)$ 為 E 之一法向量

設 E：$5x+7y-8z=k$，又 $B(0,-1,3)\in E$

$\Rightarrow k=0-7-24=-31$

故得 E：$5x+7y-8z=-31$



2. (1) 試求 E_1：$x-y=5$，E_2：$x-z=-7$ 兩平面之間的夾角．

(2) 若 E_1：$2x+3y-5z+4=0$ 與 E_2：$x-3y+kz+5=0$ 兩平面互相垂直，試求 k 之值．

解：(1) 令 $\vec{n}_1=(1,-1,0)$，$\vec{n}_2=(1,0,-1)$ 分別為平面 E_1，E_2 之一法向量

設 θ 為平面 $\vec{n}_1$，$\vec{n}_2$ 之夾角

$$\Rightarrow \cos\theta=\frac{\vec{n}_1\cdot\vec{n}_2}{|\vec{n}_1|\,|\vec{n}_2|}=\frac{1\cdot 1+(-1)\cdot 0+0\cdot(-1)}{\sqrt{1^2+(-1)^2+0^2}\sqrt{1^2+0^2+(-1)^2}}=\frac{1}{2}$$

$\Rightarrow \theta=\dfrac{\pi}{3}$，故 E_1，E_2 兩平面之夾角為 $\dfrac{\pi}{3}$，$\dfrac{2\pi}{3}$

(2) 令 $\vec{n}_1=(2,3,-5)$，$\vec{n}_2=(1,-3,k)$ 分別為平面 E_1，E_2 之一法向量

$E_1\perp E_2\Rightarrow \vec{n}_1\perp\vec{n}_2$

$\Rightarrow \vec{n}_1\cdot\vec{n}_2=0$

$\Rightarrow 2\cdot 1+3\cdot(-3)+(-5)\cdot k=0$

$\Rightarrow 2-9-5k=0$

$\Rightarrow 5k=-7$

$\Rightarrow k=-\dfrac{7}{5}$

3. (1) 試求 E_1：$x+2y-2z=9$，E_2：$x+2y-2z=24$ 兩平面之間的距離．

(2) 若 E_1：$2x-6y+3z+5=0$ 與 E_2：$2x-6y+3z=k$ 兩平面之間的距離為 4，試求 k 之值．

解：

(1) $d(E_1, E_2)=\dfrac{|9-24|}{\sqrt{1^2+2^2+(-2)^2}}=\dfrac{|-15|}{\sqrt{9}}=\dfrac{15}{3}=5$

(2) $d(E_1, E_2)=\dfrac{|5-(-k)|}{\sqrt{2^2+(-6)^2+3^2}}=\dfrac{|k+5|}{\sqrt{49}}=\dfrac{|k+5|}{7}=4$

⇨ $|k+5|=28$ ⇨ $k+5=\pm 28$

⇨ $k=-5\pm 28$

⇨ $k=23$，-33

4. (1) 空間一點 $P(2, 3, -1)$ 與一平面 E：$x-2y+2z=12$，試求 P 到 E 的距離。

(2) 承(1)，試求 P 在 E 上的投影點 Q 之坐標．

(3) 承(1)，試求 P 點相對於 E 的對稱點 P' 之坐標．

解：

(1) $\because d(P, E)=\dfrac{|1\cdot 2-2\cdot 3+2\cdot(-1)-12|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$

$$=\dfrac{|-18|}{\sqrt{1^2+(-2)^2+2^2}}=\dfrac{18}{3}=6$$

(2) 設 $Q(x, y, z)$

$$⇨ Q:\begin{cases} x=2+\dfrac{-(-18)}{1^2+(-2)^2+2^2}\times 1=4 \\ y=3+\dfrac{-(-18)}{1^2+(-2)^2+2^2}\times(-2)=-1 \\ z=-1+\dfrac{-(-18)}{1^2+(-2)^2+2^2}\times 2=3 \end{cases} \quad \therefore Q(4, -1, 3)$$

(3) 設 $P'(x, y, z)$

$$⇨ P':\begin{cases} x=2+\dfrac{-2\times(-18)}{1^2+(-2)^2+2^2}\times 1=6 \\ y=3+\dfrac{-2\times(-18)}{1^2+(-2)^2+2^2}\times(-2)=-5 \\ z=-1+\dfrac{-2\times(-18)}{1^2+(-2)^2+2^2}\times 2=7 \end{cases} \quad \therefore P'(6, -5, 7)$$