班級：＿＿＿＿ 座號：＿＿＿
姓名：＿＿＿＿＿＿

計算題（每題 20 分，共 100 分）

1. 設 $\vec{a}=(1,2,-3)$，$\vec{b}=(5,-3,-1)$，$\vec{c}=(3,0,-2)$，$\vec{d}=(2,-3,5)$，而 $(\vec{a}+s\vec{b}+t\vec{c})\,/\!/\,\vec{d}$，試求 s，t 之值．

解：$\vec{a}+s\vec{b}+t\vec{c}=(1,2,-3)+s(5,-3,-1)+t(3,0,-2)$

$=(1+5s+3t,\ 2-3s,\ -3-s-2t)\,/\!/\,(2,-3,5)$

$$\Rightarrow \frac{1+5s+3t}{2}=\frac{2-3s}{-3}=\frac{-3-s-2t}{5}\Rightarrow\begin{cases}\dfrac{1+5s+3t}{2}=\dfrac{2-3s}{-3}\\[2ex]\dfrac{2-3s}{-3}=\dfrac{-3-s-2t}{5}\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}-3-15s-9t=4-6s\\10-15s=9+3s+6t\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}9s+9t=-7\\18s+6t=1\end{cases}\Rightarrow s=\frac{17}{36},\ t=\frac{-5}{4}$$

2. (1) 設 $\vec{a}=(1,2,-2)$，試求與 $\vec{a}$ 同方向之單位向量．
(2) 設 $\vec{a}=(3,7,-5)$，$\vec{b}=(2,6,-3)$，試求 $\vec{a}$ 在 $\vec{b}$ 上之正射影．

解：(1) $|\vec{a}|=\sqrt{1^2+2^2+(-2)^2}=\sqrt{1+4+4}=3$

故得 $\dfrac{\vec{a}}{|\vec{a}|}=\dfrac{1}{3}(1,2,-2)=\left(\dfrac{1}{3},\dfrac{2}{3},-\dfrac{2}{3}\right)$

(2) $\vec{a}$ 在 $\vec{b}$ 上之正射影為 $\vec{p}=\left(\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{b}|^2}\right)\vec{b}=\left(\dfrac{6+42+15}{4+36+9}\right)(2,6,-3)$

$=\dfrac{63}{49}(2,6,-3)=\dfrac{9}{7}(2,6,-3)=\left(\dfrac{18}{7},\dfrac{54}{7},-\dfrac{27}{7}\right)$

3. 已知 $A(2,1,2)$，$B(3,-1,4)$，$P(6,-4,4)$ 為空間中三點，試求 P 點到直線 AB 之距離．

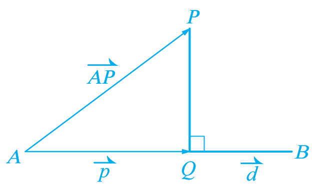
解：令 $\vec{d}=\overrightarrow{AB}=(1,-2,2)$ 為直線 AB 之一方向向量

而 $\overrightarrow{AP}=(4,-5,2)\Rightarrow|\overrightarrow{AP}|^2=4^2+(-5)^2+2^2=16+25+4=45$

設 Q 為 P 在直線 AB 上的正射影，

$\vec{p}=\overrightarrow{AQ}$ 為 $\overrightarrow{AP}$ 在直線 AB 上的正射影，則有

$|\vec{p}|^2=\left(\dfrac{\overrightarrow{AP}\cdot\vec{d}}{|\vec{d}|}\right)^2=\dfrac{(4+10+4)^2}{1+4+4}=\dfrac{18^2}{9}=36$



$\Rightarrow d(P,\text{直線 }AB)=\overline{PQ}=\sqrt{|\overrightarrow{AP}|^2-|\vec{p}|^2}=\sqrt{45-36}=3$

4. 設 A（3，1，−2），B（5，7，−5），C（2，2，−4），試求：

(1) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$．　　　　(2) $\triangle ABC$ 之面積．

解：(1) $\overrightarrow{AB}=(2,6,-3)$，$\overrightarrow{AC}=(-1,1,-2)$

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=2\cdot(-1)+6\cdot1+(-3)(-2)$

$=-2+6+6=10$

(2) $\triangle ABC$ 面積為 $\frac{1}{2}\sqrt{(|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AC}|)^2-(\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC})^2}$

$=\frac{1}{2}\sqrt{[2^2+6^2+(-3)^2][(-1)^2+1^2+(-2)^2]-10^2}$

$=\frac{1}{2}\sqrt{(4+36+9)(1+1+4)-100}$

$=\frac{1}{2}\sqrt{49\cdot6-100}$

$=\frac{1}{2}\sqrt{194}$

5. 設 x，y，z 為正數，且 $x+2y+3z=5$，試求 $\frac{5}{x}+\frac{1}{y}+\frac{3}{z}$ 的最小值．

解：

令 $\vec{u}=\left(\sqrt{\frac{5}{x}},\sqrt{\frac{1}{y}},\sqrt{\frac{3}{z}}\right)$，$\vec{v}=(\sqrt{x},\sqrt{2y},\sqrt{3z})$

由柯西不等式 $|\vec{u}|^2|\vec{v}|^2\geq|\vec{u}\cdot\vec{v}|^2$

$\Rightarrow\left[\left(\sqrt{\frac{5}{x}}\right)^2+\left(\sqrt{\frac{1}{y}}\right)^2+\left(\sqrt{\frac{3}{z}}\right)^2\right]\left[(\sqrt{x})^2+(\sqrt{2y})^2+(\sqrt{3z})^2\right]$

$\geq\left(\sqrt{\frac{5}{x}}\cdot\sqrt{x}+\sqrt{\frac{1}{y}}\cdot\sqrt{2y}+\sqrt{\frac{3}{z}}\cdot\sqrt{3z}\right)^2$

$\Rightarrow\left(\frac{5}{x}+\frac{1}{y}+\frac{3}{z}\right)(x+2y+3z)\geq(\sqrt{5}+\sqrt{2}+3)^2$

$\Rightarrow\frac{5}{x}+\frac{1}{y}+\frac{3}{z}\geq\frac{1}{5}(\sqrt{5}+\sqrt{2}+3)^2$

故所求為 $\frac{1}{5}(\sqrt{5}+\sqrt{2}+3)^2$