計算題（每題 20 分，共 100 分）

1. 在第一卦限內有一點 P 到 x 軸，y 軸，z 軸距離依次為 13，$\sqrt{106}$，15，試求 P 點坐標．

解：設 $P(x,y,z)$，則

$$\begin{cases} y^2+z^2=13^2=169 \cdots\cdots ① \\ x^2+z^2=(\sqrt{106})^2=106 \cdots\cdots ② \\ x^2+y^2=15^2=225 \cdots\cdots ③ \end{cases}$$

①＋②＋③得 $2(x^2+y^2+z^2)=500 \Rightarrow x^2+y^2+z^2=250 \cdots\cdots ④$

④－①得 $x^2=81 \Rightarrow x=9$（取正）

④－②得 $y^2=144 \Rightarrow y=12$（取正）

④－③得 $z^2=25 \Rightarrow z=5$（取正）

故得 $P(x,y,z)=(9,12,5)$

2. (1) 平行四邊形 $ABCD$ 中，$A(1,-7,3)$，$B(5,4,-2)$，$C(3,5,-9)$，試求 D 點坐標．

(2) 定點 $A(3,-2,5)$，動點 $P(1-2t,3t-1,t+2)$，$t\in\mathbb{R}$，試求 $\overline{AP}$ 之最小值．

解：

(1) 設 $D(x,y,z)$，則 $\overline{AC}$ 中點為 $M(\frac{1+3}{2},\frac{-7+5}{2},\frac{3-9}{2})=(2,-1,-3)$

而在平行四邊形 $ABCD$ 中，

$\overline{AC}$ 中點 $M(2,-1,-3)$ 亦為 $\overline{BD}$ 中點 $(\frac{x+5}{2},\frac{y+4}{2},\frac{z-2}{2})$

$\Rightarrow D(x,y,z)=(-1,-6,-4)$

(2) $\overline{AP}^2=(1-2t-3)^2+(3t-1+2)^2+(t+2-5)^2$

$=(2t+2)^2+(3t+1)^2+(t-3)^2$

$=4t^2+8t+4+9t^2+6t+1+t^2-6t+9=14t^2+8t+14$

$=14\left[t^2+2\cdot\frac{2}{7}t+(\frac{2}{7})^2\right]+14-14\cdot\frac{4}{49}$

$=14(t+\frac{2}{7})^2+\frac{90}{7}\geq\frac{90}{7}$，故 $\overline{AP}$ 之最小值為 $\sqrt{\frac{90}{7}}$

3. 設 A（3，−1，2）與 B（−1，3，4），P 是 y 軸上一點，試求使 $\overline{PA}^2+\overline{PB}^2$ 為最小值時之 P 點坐標．

解：設 P（0，y，0）為 y 軸上一點，則

$$\begin{aligned}\overline{PA}^2+\overline{PB}^2&=[(0-3)^2+(y+1)^2+(0-2)^2]+[(0+1)^2+(y-3)^2+(0-4)^2]\\&=[9+(y^2+2y+1)+4]+[1+(y^2-6y+9)+16]\\&=2y^2-4y+40=2(y^2-2y+1)+40-2\\&=2(y-1)^2+38\geq 38\end{aligned}$$

故當 P（0，1，0）時，可使 $\overline{PA}^2+\overline{PB}^2=38$ 為最小值

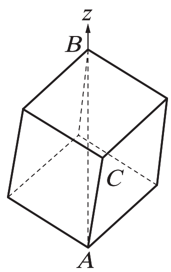
4. 設△ABC 三頂點坐標分別為 A(−1，3，−2)，B(2，−2，−5)，C(4，6，−7)，試求 $\overline{BC}$ 上之中線長．

解：

設 $\overline{BC}$ 上之中點為 $M\left(\dfrac{2+4}{2},\dfrac{-2+6}{2},\dfrac{-5-7}{2}\right)=(3，2，-6)$

$$\begin{aligned}\therefore\ \overline{AM}&=\sqrt{(-1-3)^2+(3-2)^2+(-2+6)^2}\\&=\sqrt{4^2+1^2+4^2}=\sqrt{16+1+16}\\&=\sqrt{33}\end{aligned}$$

5. 如右圖，有一邊長為 1 的正立方體，今置頂點 A 於空間坐標系中之原點（0，0，0），置頂點 B 於正 z 軸上，試求頂點 C 之 z 坐標．



解：如右下圖，設 C 在 z 軸上之投影點為 P（0，0，z）

則 $\overline{BC}\perp\overline{AC}$ 且 $\overline{BC}=\sqrt{2}$，$\overline{AB}=1$ ⇨ $\overline{AB}=\sqrt{3}$

因△ACP，△ABC 皆為直角三角形且∠ACP=∠ABC

∴△ACP ∼△ABC

$$\Rightarrow \frac{\overline{AP}}{\overline{AC}}=\frac{\overline{AC}}{\overline{AB}} \Rightarrow \frac{z}{1}=\frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\Rightarrow z=\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$$