高中數學(三) 隨堂評量卷 第 7 回

範圍：第一章　復　習

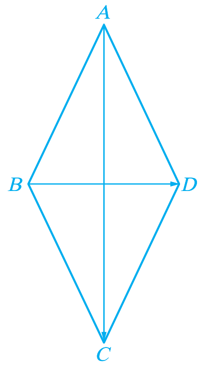
班級：________ 座號：______

姓名：________________

計算題（每題 25 分，共 100 分）

1. 試以向量內積證明：菱形之對角線互相垂直．

證：如右圖，四邊形 $ABCD$ 為菱形



設 $\overline{AB}=\overline{BC}=\overline{CD}=\overline{AD}=d$，而 $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$，$\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}$

$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}$

$=(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC})\cdot(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AD})$

$=(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC})\cdot(-\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC})$

$=-\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{BC}$

$=|\overrightarrow{BC}|^2-|\overrightarrow{AB}|^2$

$=d^2-d^2$

$=0$

$\therefore\ \overrightarrow{AC}\perp\overrightarrow{BD}$，即 $\overline{AC}\perp\overline{BD}$，故得證

2. 設 $A(3,-2)$，$B(-1,4)$，動點 $P(x,y)$ 在線段 AB 上，試求 $3x^2-2y^2$ 之最大值與最小值．

解：$\overrightarrow{AB}=(-1-3,4+2)=(-4,6)$ 為直線 AB 之一方向向量

$\therefore\ \begin{cases}x=3-4t\\y=-2+6t\end{cases}$，$0\le t\le 1$ 為 $\overline{AB}$ 的一個參數式

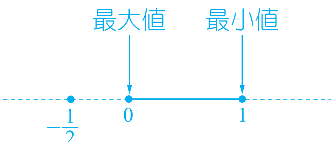
$\Rightarrow 3x^2-2y^2=3(3-4t)^2-2(-2+6t)^2$

$=3(16t^2-24t+9)-2(36t^2-24t+4)$

$=-24t^2-24t+19$

$=-24\left[t^2+t+\left(\dfrac{1}{2}\right)^2\right]+19+6$

$=-24\left(t+\dfrac{1}{2}\right)^2+25\le 25$



$\because -\dfrac{1}{2}\notin[0,1]$

$\therefore$當 $t=0$ 時，$3x^2-2y^2=19$ 為最大值

當 $t=1$ 時，$3x^2-2y^2=-29$ 為最小值

3. 設某圓之圓心為原點 O，半徑為 3，若$\triangle ABC$ 為此圓之一內接三角形，而 $\angle A=45^\circ$，$\angle B=60^\circ$，試求 $|\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}|$ 之值．

解：如右下圖，圓為$\triangle ABC$ 之外接圓，故 O 為$\triangle ABC$ 之外心

$\angle A=45^\circ \Rightarrow \angle BOC=90^\circ$，$\angle B=60^\circ \Rightarrow \angle AOC=120^\circ$，

$\angle C=75^\circ \Rightarrow \angle AOB=150^\circ$

$|\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}|^2=(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC})\cdot(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC})$

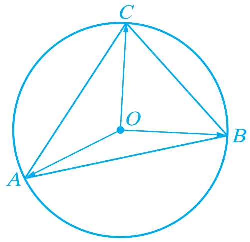
$=|\overrightarrow{OA}|^2+|\overrightarrow{OB}|^2+|\overrightarrow{OC}|^2+2(\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OC})$

$=3^2+3^2+3^2+2\cdot3\cdot3(\cos150^\circ+\cos90^\circ+\cos120^\circ)$

$=27+18(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}+0-\dfrac{1}{2})=18-9\sqrt{3}=\dfrac{9}{2}(4-2\sqrt{3})$

$=[\dfrac{3\sqrt{2}}{2}(\sqrt{3}-1)]^2$

$\therefore |\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}|=\dfrac{3\sqrt{2}}{2}(\sqrt{3}-1)$



4. 設 x，$y\in\mathbb{R}$，若 $3x-6y=10$，試求 $4x^2+9y^2-12x+24y+37$ 之最小值，及此時之 x，y 值．

解：$3x-6y=10 \Rightarrow 6x-12y=20$

$4x^2+9y^2-12x+24y+37$

$=[(2x)^2-2\cdot2x\cdot3+3^2]+[(3y)^2+2\cdot3y\cdot4+4^2]+37-9-16$

$=(2x-3)^2+(3y+4)^2+12$

令 $\vec{u}=(2x-3,3y+4)$，$\vec{v}=(3,-4)$，由柯西不等式：$|\vec{u}\cdot\vec{v}|^2\le|\vec{u}|^2|\vec{v}|^2$

$\Rightarrow |3(2x-3)-4(3y+4)|^2\le[(2x-3)^2+(3y+4)^2][3^2+(-4)^2]$

$\Rightarrow (6x-12y-25)^2\le[(2x-3)^2+(3y+4)^2]\cdot25$

$\Rightarrow (20-25)^2\le[(2x-3)^2+(3y+4)^2]\cdot25$

$\Rightarrow (2x-3)^2+(3y+4)^2+12\ge13$

$\therefore 4x^2+9y^2-12x+24y+37\ge13$，故所求最小值為 13

此時 $\vec{u}\,/\!/\,\vec{v} \Rightarrow \dfrac{2x-3}{3}=\dfrac{3y+4}{-4}=t$

$\Rightarrow \begin{cases}2x-3=3t\\3y+4=-4t\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}2x=3t+3\\3y=-4t-4\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}6x=9t+9\\-12y=16t+16\end{cases}$

$\Rightarrow 6x-12y=25t+25=20 \Rightarrow 25t=-5 \Rightarrow t=-\dfrac{1}{5}$ $\quad\therefore x=\dfrac{6}{5}$，$y=-\dfrac{16}{15}$