班級：________ 座號：____

姓名：________________

一、填充題（每題 20 分，共 60 分）

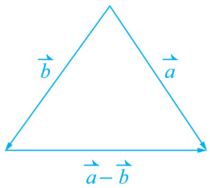
1. 設 $|\vec{a}|=|\vec{b}|=|\vec{a}-\vec{b}|=3$，試求：

(1) $\vec{a}$ 與 $\vec{b}$ 之夾角為________．　　(2) $\vec{b}$ 與 $\vec{a}-\vec{b}$ 之夾角為________．

解：(1) $|\vec{a}-\vec{b}|^2=(\vec{a}-\vec{b})\cdot(\vec{a}-\vec{b})=|\vec{a}|^2-2(\vec{a}\cdot\vec{b})+|\vec{b}|^2$

$$\Rightarrow 3^2=3^2-2(\vec{a}\cdot\vec{b})+3^2 \Rightarrow \vec{a}\cdot\vec{b}=\frac{9}{2} \Rightarrow \cos\theta=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\,|\vec{b}|}=\frac{\frac{9}{2}}{3\cdot 3}=\frac{1}{2}$$

$\therefore \theta=\dfrac{\pi}{3}$（或 60°）



(2) $\vec{b}\cdot(\vec{a}-\vec{b})=\vec{b}\cdot\vec{a}-|\vec{b}|^2=\dfrac{9}{2}-3^2=-\dfrac{9}{2}$

$$\Rightarrow \cos\theta=\frac{\vec{b}\cdot(\vec{a}-\vec{b})}{|\vec{b}|\,|\vec{a}-\vec{b}|}=\frac{-\frac{9}{2}}{3\cdot 3}=-\frac{1}{2}$$

$\therefore \theta=\dfrac{2\pi}{3}$（或 120°）

2. (1) 設 x，$y\in\mathbb{R}$ 且 $x^2+y^2=1$，試求 $3x-2y$ 的最大值為________．

(2) 設 x，$y\in\mathbb{R}$ 且 $4x-3y=6$，試求 $2x^2+y^2$ 之最小值為________．

解：(1) 令 $\vec{u}=(x,y)$，$\vec{v}=(3,-2)$，由柯西不等式 $|\vec{u}\cdot\vec{v}|\le|\vec{u}|\,|\vec{v}|$

$\Rightarrow |3x-2y|\le\sqrt{x^2+y^2}\sqrt{3^2+(-2)^2}$

$\Rightarrow |3x-2y|\le\sqrt{13}$

$\therefore -\sqrt{13}\le 3x-2y\le\sqrt{13}$

故得 $3x-2y$ 的最大值為 $\sqrt{13}$

(2) 令 $\vec{u}=(\sqrt{2}x,y)$，$\vec{v}=(2\sqrt{2},-3)$，由柯西不等式 $|\vec{u}\cdot\vec{v}|^2\le|\vec{u}|^2|\vec{v}|^2$

$\Rightarrow |4x-3y|^2\le(2x^2+y^2)[(2\sqrt{2})^2+(-3)^2]$

$\Rightarrow 6^2\le(2x^2+y^2)\cdot 17$

$\therefore 2x^2+y^2\ge\dfrac{36}{17}$

故得 $2x^2+y^2$ 的最小值為 $\dfrac{36}{17}$

3. (1) 試求點 $P(-2,5)$ 到直線 $L: 5x-12y=-5$ 的距離為________.

(2) 試求點 $P(4,-3)$ 到直線 $L:\begin{cases} x=-1+2t \\ y=4-3t \end{cases}$，$t\in\mathbb{R}$ 的距離為________.

解：

(1) $d(P,L)=\dfrac{|5\cdot(-2)-12\cdot 5+5|}{\sqrt{5^2+(-12)^2}}=\dfrac{|-10-60+5|}{13}=\dfrac{65}{13}=5$

(2) $\begin{cases} x=-1+2t \\ y=4-3t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x=-3+6t \\ 2y=8-6t \end{cases} \Rightarrow 3x+2y=5$

$\therefore d(P,L)=\dfrac{|3\cdot 4+2\cdot(-3)-5|}{\sqrt{3^2+2^2}}=\dfrac{|12-6-5|}{\sqrt{13}}=\dfrac{1}{\sqrt{13}}=\dfrac{\sqrt{13}}{13}$

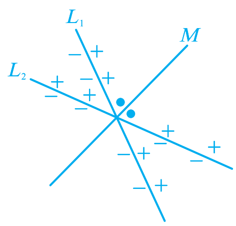
二、計算題（每題 20 分，共 40 分）

1. 試求 $L_1: 12x+5y=3$ 與 $L_2: 3x+4y=7$ 兩直線所夾鈍角之平分線方程式.

解：

令 $m_1=-\dfrac{12}{5}<0$，$m_2=-\dfrac{3}{4}<0$，L_1，L_2 之相關位置如下圖

由圖中可知 L_1，L_2 所夾鈍角之平分線 M 位在同號區



$\Rightarrow \dfrac{12x+5y-3}{\sqrt{12^2+5^2}}=+\dfrac{3x+4y-7}{\sqrt{3^2+4^2}}$

$\Rightarrow \dfrac{12x+5y-3}{13}=\dfrac{3x+4y-7}{5}$

$\Rightarrow 60x+25y-15=39x+52y-91$

故得 $M: 11x+27y+76=0$

2. 直線 L 之斜率為 2，且與點 $A(3,-4)$ 之距離為 $3\sqrt{5}$，試求 L 之方程式.

解：設 $L: 2x-y=k$

$d(P,L)=\dfrac{|2\cdot 3-(-4)-k|}{\sqrt{4+1}}=3\sqrt{5}$

$\Rightarrow \left(\dfrac{|k-10|}{\sqrt{5}}\right)^2=(3\sqrt{5})^2 \Rightarrow \dfrac{k^2-20k+100}{5}=45$

$\Rightarrow k^2-20k-125=0 \Rightarrow (k-25)(k+5)=0$

$\Rightarrow k=25，-5$

故得 $L: 2x-y=25$，$L: 2x-y=-5$