填充題（每題 25 分，共 100 分）

1. (1) 設 $\vec{a}=(-3,-5)$，$\vec{b}=(4,-1)$ 兩向量之間的夾角為 θ，則 $\cos\theta=$ ________ .

(2) 設 $\vec{a}$ 與 $\vec{b}=(\sqrt{3},-1)$ 的夾角是 120°，已知 $|\vec{a}|=6$，則 $\vec{a}=$ ________ .

解：

(1) $\cos\theta=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\,|\vec{b}|}=\dfrac{-12+5}{\sqrt{9+25}\sqrt{16+1}}$

$=\dfrac{-7}{\sqrt{34}\sqrt{17}}=\dfrac{-7}{17\sqrt{2}}=-\dfrac{7}{34}\sqrt{2}$

(2) 設 $\vec{a}=(x,y)\Rightarrow|a|^2=x^2+y^2=36\cdots\cdots①$

又 $\vec{a}\cdot\vec{b}=|a|\,|b|\cos120^\circ$

$\Rightarrow (x,y)\cdot(\sqrt{3},-1)=6\times\sqrt{3+1}\times(-\dfrac{1}{2})$

$\Rightarrow \sqrt{3}x-y=-6\cdots\cdots②$

②代入①得 $x^2+(\sqrt{3}x+6)^2=36$

$\Rightarrow x^2+3\sqrt{3}x=0$

$\Rightarrow x=0,-3\sqrt{3}$ 代回②

$\Rightarrow y=6,-3$

故得 $\vec{a}=(0,6)$，$(-3\sqrt{3},-3)$

2. 求 $L_1：2x+3y-5=0$，$L_2：x-2y+3=0$ 兩直線夾角的餘弦值為 ________ .

解：令 $\vec{n_1}=(2,3)$，$\vec{n_2}=(1,-2)$ 分別為 L_1，L_2 之一法向量，

設 $\vec{n_1}$，$\vec{n_2}$ 之夾角為 θ，則

$\cos\theta=\dfrac{\vec{n_1}\cdot\vec{n_2}}{|\vec{n_1}|\,|\vec{n_2}|}=\dfrac{2-6}{\sqrt{4+9}\sqrt{1+4}}=\dfrac{-4}{\sqrt{13}\sqrt{5}}=\dfrac{-4}{\sqrt{65}}$

而 L_1，L_2 之兩夾角為 θ，$\pi-\theta$，且 $\cos(\pi-\theta)=-\cos\theta=\dfrac{4}{\sqrt{65}}$

故得 L_1，L_2 夾角的餘弦值為 $\pm\dfrac{4}{\sqrt{65}}$

3. (1) 設 $\vec{a}=(-4,3)$，直線 L 之方程式為 $3x-5y+7=0$，則 $\vec{a}$ 在 L 上之正射影為________．

(2) 設 $A(-1,4)$，$B(0,2)$，$C(5,-3)$，則 $\triangle ABC$ 之面積為________．

解：(1) 令 $\vec{n}=(3,-5)$ 為 L 之一法向量，則 $\vec{d}=(5,3)$ 為 L 之一方向向量

故 $\vec{a}$ 在直線 L 上之正射影為

$$\vec{p}=\left(\frac{\vec{a}\cdot\vec{d}}{|\vec{d}|^2}\right)\vec{d}=\left(\frac{-20+9}{9+25}\right)(5,2)$$

$$=\frac{-11}{34}(5,2)=\left(-\frac{55}{34},-\frac{11}{17}\right)$$

(2) $\overrightarrow{AB}=(0+1,2-4)=(1,-2)$

$\overrightarrow{AC}=(5+1,-3-4)=(6,-7)$

$$\therefore \triangle ABC \text{ 面積為 } \frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix}1 & -2\\ 6 & -7\end{vmatrix}\right|=\frac{1}{2}|-7+12|=\frac{5}{2}$$

4. 試求通過點 $P(-2,1)$ 且與直線 $L:3x-y+5=0$ 的夾角餘弦值為 $\frac{4}{5}$ 之直線方程式為________．

解：設所求直線 M 之斜率為 m，則 $M:y-1=m(x+2)$

$\Rightarrow M:mx-y+2m+1=0$

令 $\vec{n_1}=(3,-1)$，$\vec{n_2}=(m,-1)$ 分別為 L，M 之一法向量

設 $\vec{n_1}$，$\vec{n_2}$ 之夾角為 α，則 L，M 之兩夾角 θ 為 α，$\pi-\alpha$

$$\Rightarrow \cos\theta=\pm\cos\alpha=\pm\frac{\vec{n_1}\cdot\vec{n_2}}{|\vec{n_1}||\vec{n_2}|}$$

$$\Rightarrow \left(\pm\frac{3m+1}{\sqrt{9+1}\sqrt{m^2+1}}\right)^2=\left(\frac{4}{5}\right)^2 \Rightarrow \frac{9m^2+6m+1}{10(m^2+1)}=\frac{16}{25}$$

$\Rightarrow 45m^2+30m+5=32m^2+32 \Rightarrow 13m^2+30m-27=0$

$\Rightarrow (m+3)(13m-9)=0$

$\therefore m=-3,\ \frac{9}{13}$

故得 $M_1:3x+y+5=0$，$M_2:9x-13y+31=0$