計算題（每題 25 分，共 100 分）

1. (1) 設 $A(3,-5)$，$B(-4,-5)$，若 P 在直線 AB 上且 $\overline{AP}:\overline{PB}=2:5$，試求 P 點坐標．

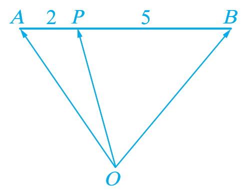
(2) 以 $Q(5,-12)$ 為圓心，15 為半徑作一圓，$\triangle ABC$ 為此圓之一內接正三角形，O 為原點，試求 $|\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}|$ 之值．

解：

(1) $\overrightarrow{OP}=\dfrac{5}{2+5}\overrightarrow{OA}+\dfrac{2}{2+5}\overrightarrow{OB}=\dfrac{5}{7}(3,-5)+\dfrac{2}{7}(-4,-5)$

$=(\dfrac{15}{7},\dfrac{-25}{7})+(\dfrac{-8}{7},\dfrac{-10}{7})$

$=(\dfrac{7}{7},\dfrac{-35}{7})=(1,-5)$



即 $P(1,-5)$

(2) 圓心 $Q(5,-12)$ 為正$\triangle ABC$ 之重心

$\Rightarrow \overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=3\overrightarrow{OQ}=3(5,-12)$

$\therefore |\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}|=3|(5,-12)|=3\sqrt{5^2+(-12)^2}=3\times 13=39$

2. (1) 設向量 $\vec{a}$ 平行於直線 $L:2x-5y=4$，且長度為 3，試求向量 $\vec{a}$．

(2) 設 $A(k-6,-2)$，$B(-3,-5)$，$C(-6,k+2)$ 三點共線，試求 k 之值．

解：(1) 令 $\vec{n}=(2,-5)$ 為 L 之一法向量

設 $\vec{a}=(5t,2t)\perp\vec{n}$，則 $\vec{a}\,/\!/\,L$ 為 L 之一方向向量

$|\vec{a}|=\sqrt{(5t)^2+(2t)^2}=\sqrt{29t^2}=\sqrt{29}\,|t|=3\Rightarrow t=\pm\dfrac{3}{\sqrt{29}}$

$\therefore \vec{a}=\pm\dfrac{3}{\sqrt{29}}(5,2)=\pm(\dfrac{15}{\sqrt{29}},\dfrac{6}{\sqrt{29}})$

(2) $\overrightarrow{AB}=(-3-k+6,-5+2)=(-k+3,-3)$

$\overrightarrow{BC}=(-6+3,k+2+5)=(-3,k+7)$

A，B，C 三點共線 $\Rightarrow \overrightarrow{AB}\,/\!/\,\overrightarrow{BC}\Rightarrow \dfrac{-k+3}{-3}=\dfrac{-3}{k+7}$

$\Rightarrow -(k-3)(k+7)=9\Rightarrow k^2+4k-12=0$

$\Rightarrow (k-2)(k+6)=0$

$\therefore k=2,-6$

3. 已知 $\vec{a}=(3,-2)$，$\vec{b}=(1,x)$，令 $\vec{u}=3\vec{a}-\vec{b}$，$\vec{v}=\vec{a}-2\vec{b}$，

(1) 若 $\vec{u}\parallel\vec{v}$，試求 x 之值．　　(2) 若 $\vec{u}\perp\vec{v}$，試求 x 之值．

解：(1) $\vec{u}=3\vec{a}-\vec{b}=3(3,-2)-(1,x)=(8,-x-6)$

$\vec{v}=\vec{a}-2\vec{b}=(3,-2)-2(1,x)=(1,-2x-2)$

$\vec{u}\parallel\vec{v} \Rightarrow \dfrac{8}{1}=\dfrac{-x-6}{-2x-2}=\dfrac{x+6}{2x+2}$

$\Rightarrow 16x+16=x+6$

$\Rightarrow 15x=-10$

$\therefore x=-\dfrac{2}{3}$

(2) $\vec{u}\perp\vec{v} \Rightarrow \vec{u}\cdot\vec{v}=0$

$\Rightarrow 8+(x+6)(2x+2)=0$

$\Rightarrow 8+(2x^2+14x+12)=0$

$\Rightarrow 2x^2+14x+20=0 \Rightarrow x^2+7x+10=0$

$\Rightarrow (x+2)(x+5)=0$

$\therefore x=-2,-5$

4. 設 $A(-2,3)$，$B(-5,4)$，P 為 $\overline{AB}$ 上一點，試求 P 到原點的最短與最長距離．

解：$\overrightarrow{AB}=(-5+2,4-3)=(-3,1)$

故 $\overline{AB}$ 的一個參數式為 $\begin{cases} x=-2-3t \\ y=3+t \end{cases}$，$0\le t\le 1$

$P(-2-3t,3+t)$ 為 $\overline{AB}$ 上任意點，則 P 到原點 O 的距離平方為

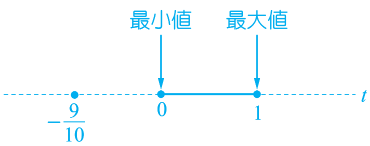
$\overline{OP}^2=(-2-3t)^2+(3+t)^2$

$=(9t^2+12t+4)+(t^2+6t+9)$

$=10t^2+18t+13$

$=10\left[t^2+2\times\dfrac{9}{10}t+\left(\dfrac{9}{10}\right)^2\right]+13-\dfrac{81}{10}$

$=10\left(t+\dfrac{9}{10}\right)^2+\dfrac{49}{10}$



$\because -\dfrac{9}{10}\notin[0,1]$

$\therefore$ 當 $t=0$ 時，$\overline{OP}=\sqrt{13}$ 為最短距離

當 $t=1$ 時，$\overline{OP}=\sqrt{41}$ 為最長距離