計算題（每題 20 分，共 100 分）

1. (1) 設 $\vec{u}=(-2,6)$，$\vec{v}=(5,-2)$，求 $|3\vec{u}-4\vec{v}|$．
   (2) 試求一向量 $\vec{u}$，使得 $|\vec{u}|=1$，且 $\vec{u}$ 與 $\vec{v}=(-8,15)$ 反方向．

解：(1) $|3\vec{u}-4\vec{v}|=|3(-2,6)-4(5,-2)|=|(-6,18)-(20,-8)|$
$=|(-26,26)|=\sqrt{(-26)^2+26^2}=26\sqrt{2}$

(2) 令 $\vec{w}=-\vec{v}=(8,-15)$，則 $\vec{w}$ 與 $\vec{v}$ 反方向
$|\vec{w}|=\sqrt{8^2+(-15)^2}=\sqrt{289}=17$
$\therefore \vec{u}=\dfrac{\vec{w}}{|\vec{w}|}=\left(\dfrac{8}{17},-\dfrac{15}{17}\right)$

2. 設 $\vec{u}=(-2,3)$，$\vec{v}=(-4,-1)$，若 $(3\alpha-2\beta+1)\vec{u}+(2\alpha+3\beta-1)\vec{v}=\vec{0}$，試求數對 (α,β)．

解：$(3\alpha-2\beta+1)(-2,3)+(2\alpha+3\beta-1)(-4,-1)=\vec{0}$
$\Rightarrow (-6\alpha+4\beta-2,9\alpha-6\beta+3)+(-8\alpha-12\beta+4,-2\alpha-3\beta+1)=(0,0)$
$\Rightarrow (-14\alpha-8\beta+2,7\alpha-9\beta+4)=(0,0)$
$\Rightarrow \begin{cases}14\alpha+8\beta=2\\7\alpha-9\beta=-4\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}14\alpha+8\beta=2\\14\alpha-18\beta=-8\end{cases}$
$\therefore \alpha=-\dfrac{1}{13}$，$\beta=\dfrac{5}{13}$

故得數對 $(\alpha,\beta)=\left(-\dfrac{1}{13},\dfrac{5}{13}\right)$

3. 直線 L 通過 $A(2,-3)$，$B(-3,-1)$ 兩點，試求：
   (1) L 的參數式．　　(2) $\overline{AB}$ 的參數式．

解：(1) $\overrightarrow{AB}=(-3-2,-1+3)=(-5,2)$ 為 L 的一方向向量

故 $\begin{cases}x=2-5t\\y=-3+2t\end{cases}$，$t\in\mathbb{R}$　為 L 的一個參數式（不唯一）

(2) 由(1)得 $\begin{cases}x=2-5t\\y=-3+2t\end{cases}$，$0\le t\le 1$　為 $\overline{AB}$ 的一個參數式（不唯一）

4. 設 L 為過 A（-2，3）與 B（-5，8）的直線，P（x，y）為 L 上一點，試求：

(1) x^2-y^2 之最大值．　(2) L 到原點的距離．

解：(1) $\overrightarrow{AB}=(-5+2,8-3)=(-3,5)$ 為 L 的一方向向量

故 L 的一個參數式為 $\begin{cases}x=-2-3t\\y=3+5t\end{cases}$，$t\in\mathbb{R}$

$P(-2-3t,3+5t)$ 為 L 上任意點

$x^2-y^2=(-2-3t)^2-(3+5t)^2=(9t^2+12t+4)-(25t^2+30t+9)$

$=-16t^2-18t-5=-16\left[t^2+2\times\frac{9}{16}t+\left(\frac{9}{16}\right)^2\right]-5+\frac{81}{16}$

$=-16\left(t+\frac{9}{16}\right)^2+\frac{1}{16}\le\frac{1}{16}$

故 x^2-y^2 之最大值為 $\frac{1}{16}$

(2) $P(-2-3t,3+5t)$ 為 L 上任意點，則 L 到原點 O 的距離平方為

$\overline{OP}^2=x^2+y^2=(-2-3t)^2+(3+5t)^2$

$=(9t^2+12t+4)+(25t^2+30t+9)=34t^2+42t+13$

$=34\left[t^2+2\times\frac{21}{34}t+\left(\frac{21}{34}\right)^2\right]+13-\frac{441}{34}$

$=34\left(t+\frac{21}{34}\right)^2+\frac{1}{34}\ge\frac{1}{34}$

故 L 到原點 O 的距離為 $\frac{1}{\sqrt{34}}$

5. 設直線 L_1，L_2 之參數式分別為 L_1：$\begin{cases}x=1-2t\\y=-2+3t\end{cases}$，$t\in\mathbb{R}$；$L_2$：$\begin{cases}x=5+2s\\y=-4+s\end{cases}$，$s\in\mathbb{R}$，

試求 L_1，L_2 之交點．

解：L_1：$\begin{cases}x=1-2t\\y=-2+3t\end{cases}$，$t\in\mathbb{R}$；$L_2$：$\begin{cases}x=5+2s\\y=-4+s\end{cases}$，$s\in\mathbb{R}$

令 $\begin{cases}1-2t=5+2s\\-2+3t=-4+s\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}2t+2s=-4\\3t-s=-2\end{cases}$

$\Rightarrow\begin{cases}t=-1\\s=-1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=3\\y=-5\end{cases}$

故 L_1，L_2 之交點為（3，-5）