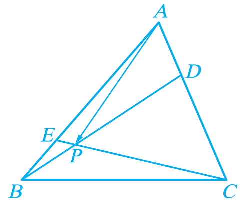
一、填充題（每題 25 分，共 50 分）

1. 設△ABC 中，E 為 $\overline{AB}$ 上一點，且 $\overline{AE}=\frac{3}{4}\overline{AB}$，$D$ 是 $\overline{AC}$ 上一點，且 $\overline{AD}=\frac{1}{3}\overline{AC}$，若 $\overline{BD}$ 與 $\overline{CE}$ 相交於 P，且設 $\overrightarrow{AP}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AC}$，試求：

(1) x，y 之值為________． (2) $\overline{EP}:\overline{PC}=$________．

解：(1) 在△ABD 中，$\overrightarrow{AP}=x\overrightarrow{AB}+3y\overrightarrow{AD}$



∵ B，P，D 三點共線 ∴ $x+3y=1$ ……………①

又在△AEC 中，$\overrightarrow{AP}=\frac{4x}{3}\overrightarrow{AE}+y\overrightarrow{AC}$

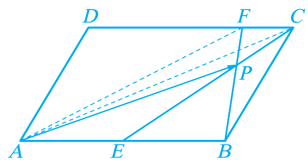
∵ E，P，C 三點共線 ∴ $\frac{4x}{3}+y=1$……………②

由①、②得 $x=\frac{2}{3}$，$y=\frac{1}{9}$

(2) 由(1)，在△AEC 中，$\overrightarrow{AP}=\frac{4x}{3}\overrightarrow{AE}+y\overrightarrow{AC}=\frac{8}{9}\overrightarrow{AE}+\frac{1}{9}\overrightarrow{AC}$

∴ $\overline{EP}:\overline{PC}=\frac{1}{9}:\frac{8}{9}=1:8$

2. 設平行四邊形 $ABCD$ 中，E 為 $\overline{AB}$ 之中點，F 在 $\overline{CD}$ 上且 $\overline{CF}:\overline{FD}=1:3$，若 P 為 $\overline{BF}$ 與 $\overline{CE}$ 之交點，則 $\overrightarrow{AP}=$________$\overrightarrow{AB}+$________$\overrightarrow{AD}$．



解：設 $\overrightarrow{AP}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AD}$，作 $\overrightarrow{AC}$，$\overrightarrow{AF}$，如右圖

在△ABF 中，$\overrightarrow{AP}=x\overrightarrow{AB}+y(\overrightarrow{AF}-\overrightarrow{DF})$

$=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AF}-y(\frac{3}{4}\overrightarrow{AB})=(x-\frac{3}{4}y)\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AF}$

∵ B，P，F 三點共線 ∴ $x-\frac{3}{4}y+y=x+\frac{y}{4}=1$……………①

又在△AEC 中，$\overrightarrow{AP}=x(2\overrightarrow{AE})+y(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{DC})$

$=2x\overrightarrow{AE}+y\overrightarrow{AC}-y(2\overrightarrow{AE})=(2x-2y)\overrightarrow{AE}+y\overrightarrow{AC}$

∵ E，P，C 三點共線 ∴ $2x-2y+y=2x-y=1$ ……………②

由①、②得 $x=\frac{5}{6}$，$y=\frac{2}{3}$

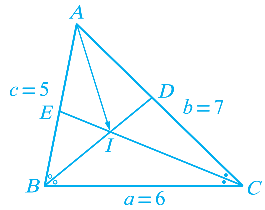
二、計算題（每題 25 分，共 50 分）

1. $\triangle ABC$ 中，$\overline{AB}=5$，$\overline{BC}=6$，$\overline{CA}=7$，I 是$\triangle ABC$ 的內心，設 $\overrightarrow{AI}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AC}$，試求 x，y 之值．

解：I 是$\triangle ABC$ 的內心

$\Rightarrow \overrightarrow{OI}=\dfrac{a}{a+b+c}\overrightarrow{OA}+\dfrac{b}{a+b+c}\overrightarrow{OB}+\dfrac{c}{a+b+c}\overrightarrow{OC}$，其中 O 為任意點

$\therefore \overrightarrow{OI}=\dfrac{6}{5+6+7}\overrightarrow{OA}+\dfrac{7}{5+6+7}\overrightarrow{OB}+\dfrac{5}{5+6+7}\overrightarrow{OC}$



$=\dfrac{6}{18}\overrightarrow{OA}+\dfrac{7}{18}\overrightarrow{OB}+\dfrac{5}{18}\overrightarrow{OC}$

令 $O=A$，則

$\overrightarrow{AI}=\dfrac{6}{18}\overrightarrow{AA}+\dfrac{7}{18}\overrightarrow{AB}+\dfrac{5}{18}\overrightarrow{AC}$

$=\dfrac{6}{18}\vec{0}+\dfrac{7}{18}\overrightarrow{AB}+\dfrac{5}{18}\overrightarrow{AC}$

$=\dfrac{7}{18}\overrightarrow{AB}+\dfrac{5}{18}\overrightarrow{AC}$

故得 $x=\dfrac{7}{18}$，$y=\dfrac{5}{18}$

2. 設 H 為$\triangle ABC$ 之垂心，若 $\overline{AB}=9$，$\overline{BC}=3\sqrt{7}$，$\overline{AC}=6$，若 $\overrightarrow{AH}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AC}$，試求 x，y 之值．

解：設 H 為$\triangle ABC$ 之垂心

$\Rightarrow \overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\dfrac{1}{2}\left[9^2+6^2-(3\sqrt{7})^2\right]=27$

$\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{AB}=x|\overrightarrow{AB}|^2+y\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB}$

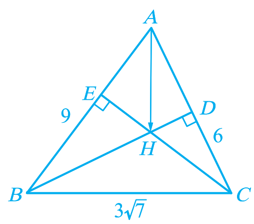
$\Rightarrow \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=x|\overrightarrow{AB}|^2+y\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$

$\Rightarrow 27=81x+27y \Rightarrow 3x+y=1$ ……………①

$\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{AC}=x\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}+y|\overrightarrow{AC}|^2$

$\Rightarrow \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=x\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}+y|\overrightarrow{AC}|^2$

$\Rightarrow 27=27x+36y \Rightarrow 3x+4y=3$……………②



由①、②得 $x=\dfrac{1}{9}$，$y=\dfrac{2}{3}$