NO.00198
4 716413 001980 17

高中數學(三) 隨堂評量卷

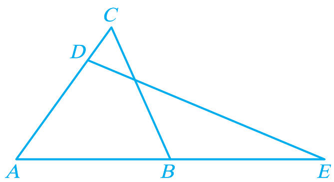
第 1 回 範圍 1－1 有向線段與向量

班級：＿＿＿＿ 座號：＿＿＿
姓名：＿＿＿＿＿＿

填充題（每題 25 分，共 100 分）

1. 設△ABC 中，D 為 $\overline{AC}$ 上一點，$\overline{AD}:\overline{DC}=3:1$，$E$ 是 $\overline{AB}$ 延長線上的一點，且 $\overline{AE}=2\overline{AB}$，則 $\overrightarrow{DE}=$＿＿＿＿ $\overrightarrow{CA}+$＿＿＿＿ $\overrightarrow{CB}$．

解：如右圖，由圖中可得



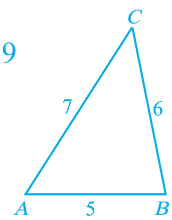
$$\overrightarrow{DE}=\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AE}=\frac{3}{4}\overrightarrow{CA}+2\overrightarrow{AB}$$

$$=\frac{3}{4}\overrightarrow{CA}+2(\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{CA})=-\frac{5}{4}\overrightarrow{CA}+2\overrightarrow{CB}$$

2. 設△ABC 中，$\overline{AB}=5$，$\overline{BC}=6$，$\overline{CA}=7$，則

(1) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=$＿＿＿＿．　(2) $\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{CA}=$＿＿＿＿．

解：



(1) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\frac{1}{2}(5^2+7^2-6^2)=\frac{1}{2}(25+49-36)=\frac{1}{2}\times 38=19$

(2) $\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{CA}=(-\overrightarrow{CB})\cdot\overrightarrow{CA}=-(\overrightarrow{CB}\cdot\overrightarrow{CA})$

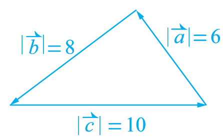
$$=-\frac{1}{2}(6^2+7^2-5^2)=-\frac{1}{2}(36+49-25)$$

$$=-\frac{1}{2}\times 60=-30$$

3. 設 $|\vec{a}|=6$，$|\vec{b}|=8$，$|\vec{c}|=10$，且 $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{0}$，則

(1) $\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}\cdot\vec{c}+\vec{c}\cdot\vec{a}=$＿＿＿＿．　(2) $\vec{a}\cdot\vec{b}=$＿＿＿＿．

解：(1) 如右圖，$\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{0}$



$\Rightarrow (\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})\cdot(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})=\vec{0}\cdot\vec{0}$

$\Rightarrow |\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2+|\vec{c}|^2+2(\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}\cdot\vec{c}+\vec{c}\cdot\vec{a})=0$

$$\therefore \vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}\cdot\vec{c}+\vec{c}\cdot\vec{a}=\frac{-(36+64+100)}{2}=-100$$

(2) $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{0}\Rightarrow \vec{a}+\vec{b}=-\vec{c}\Rightarrow (\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}+\vec{b})=(-\vec{c})\cdot(-\vec{c})$

$\Rightarrow |\vec{a}|^2+2(\vec{a}\cdot\vec{b})+|\vec{b}|^2=|\vec{c}|^2$

$$\therefore \vec{a}\cdot\vec{b}=\frac{1}{2}(100-36-64)=0$$

NO.00198 4 716413 001980 67

4. (1) 設 $|\vec{a}|=3$，$|\vec{b}|=5$，$\vec{a}$，$\vec{b}$ 之夾角為 60°，則 $|\vec{a}+t\vec{b}|$ 之最小值為________.

(2) 設 $|\vec{u}|=2$，$|\vec{v}|=3$，且 $\vec{u}\perp\vec{v}$，則 $\vec{u}-2\vec{v}$ 與 $3\vec{u}-\vec{v}$ 之夾角為________.

解：(1) $|\vec{a}+t\vec{b}|^2=(\vec{a}+t\vec{b})\cdot(\vec{a}+t\vec{b})$

$=|\vec{a}|^2+2t(\vec{a}\cdot\vec{b})+t^2|\vec{b}|^2$

$=3^2+2t|\vec{a}||\vec{b}|\cos60^\circ+5^2t^2$

$=9+t\times3\times5+25t^2$

$=25t^2+15t+9$

$=25\left[t^2+2\times\dfrac{3}{10}t+(\dfrac{3}{10})^2\right]+9-25\times\dfrac{9}{100}$

$=25(t+\dfrac{3}{10})^2+\dfrac{27}{4}\geq\dfrac{27}{4}$

$\Rightarrow |\vec{a}+t\vec{b}|=\sqrt{25(t+\dfrac{3}{10})^2+\dfrac{27}{4}}\geq\sqrt{\dfrac{27}{4}}=\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$

故得 $|\vec{a}+t\vec{b}|$ 之最小值為 $\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$

(2) $(\vec{u}-2\vec{v})\cdot(3\vec{u}-\vec{v})$

$=3|\vec{u}|^2-7(\vec{u}\cdot\vec{v})+2|\vec{v}|^2$

$=3\times2^2-7\times0+2\times3^2=12+18=30$

$|\vec{u}-2\vec{v}|^2=|\vec{u}|^2-4\vec{u}\cdot\vec{v}+4|\vec{v}|^2$

$=2^2-4\times0+4\times3^2=40$

$\Rightarrow |\vec{u}-2\vec{v}|=2\sqrt{10}$

$|3\vec{u}-\vec{v}|^2=9|\vec{u}|^2-6\vec{u}\cdot\vec{v}+|\vec{v}|^2$

$=9\times2^2-6\times0+3^2=45$

$\Rightarrow |3\vec{u}-\vec{v}|=3\sqrt{5}$

$\Rightarrow \cos\theta=\dfrac{(\vec{u}-2\vec{v})\cdot(3\vec{u}-\vec{v})}{|\vec{u}-2\vec{v}||3\vec{u}-\vec{v}|}=\dfrac{30}{2\sqrt{10}\times3\sqrt{5}}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}=\cos\dfrac{\pi}{4}$

故得所求 $\theta=\dfrac{\pi}{4}$（或 45°）