

2-4

組 合

例題 1

由 6 個男生，5 個女生中選出一個 5 人委員會，其中規定男女生至少各有二人，則有 _____ 種選法。

解：

選 法	二男三女	三男二女	合 計
組合數	$C_2^6 \times C_3^5 = 150$	$C_3^6 \times C_2^5 = 200$	350

例題 2

$C_r^n : C_{r-1}^n = 9 : 2$ 且 $C_{4r-1}^n = C_{r+1}^n$ ，試求 r 與 n 。

解： $9 \times C_{r-1}^n = 2 \times C_r^n$

$$\Leftrightarrow 9 \times \frac{n!}{(n-r+1)!(r-1)!} = 2 \times \frac{n!}{(n-r)!r!}$$

$$\Leftrightarrow \frac{9}{(n-r+1)} = \frac{2}{r} \Leftrightarrow 9r = 2n - 2r + 2$$

$$\Leftrightarrow 2n - 11r + 2 = 0 \dots\dots\dots \textcircled{1}$$

$$\text{又 } (4r-1) + (r+1) = n \Leftrightarrow 5r = n \dots\dots\dots \textcircled{2}$$

由①、②聯立解得 $r=2, n=10$

例題 3

(1) $C_2^6 + C_3^6 =$ _____。

(2) $C_2^3 + C_2^4 + C_2^5 + C_2^6 + \dots + C_2^{20} =$ _____。

解：

(1) $C_2^6 + C_3^6 = C_3^7 = \frac{7!}{3!4!} = 35$

(2) $C_2^3 + C_2^4 + C_2^5 + C_2^6 + \dots + C_2^{20}$
 $= \underbrace{C_3^3 + C_2^3} + C_2^4 + C_2^5 + C_2^6 + \dots + C_2^{20} - C_3^3$
 $= \underbrace{C_3^4 + C_2^4} + C_2^5 + C_2^6 + \dots + C_2^{20} - C_3^3$
 $= \underbrace{C_3^5 + C_2^5} + C_2^6 + \dots + C_2^{20} - C_3^3$
 $= C_3^{20} + C_2^{20} - C_3^3 = C_3^{21} - C_3^3 = 1330 - 1 = 1329$

例題 4

自 5 雙尺寸不同的鞋子中選出 4 隻，則：

- (1) 此 4 隻均不成雙的選法共有 _____ 種。
- (2) 此 4 隻中恰含一雙的選法有 _____ 種。

解：(1) 由 5 雙鞋任取 4 雙，再從此 4 雙中各任取 1 隻

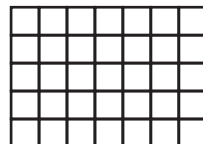
$$C_4^5 \times (C_1^2 \times C_1^2 \times C_1^2 \times C_1^2) = 5 \times 16 = 80 \text{ (種)}$$

(2) 由 5 雙先任取 1 雙，再從剩餘的 4 雙中任取 2 雙，再從此 2 雙中各任取 1 隻

$$C_1^5 \times C_2^4 \times (C_1^2 \times C_1^2) = 120 \text{ (種)}$$

例題 5

如右圖，共有 _____ 個矩形， _____ 個正方形。



解：(1) 鉛垂方向 8 條平行線，任取兩條平行線有 C_2^8 (種)

水平方向 6 條平行線，任取兩條平行線有 C_2^6 (種)

矩形的個數共有 $C_2^8 \times C_2^6 = 28 \times 15 = 420$ (個)

(2) 將大大小小的正方形分類：

邊長	1×1	2×2	3×3	4×4	5×5
個數	7×5	6×4	5×3	4×2	3×1

所求為 $35 + 24 + 15 + 8 + 3 = 85$ (個)

例題 6

籃球 3 人鬥牛賽，共有甲、乙、丙、丁、戊、己、庚、辛、壬 9 人參加，組成 3 隊，且甲、乙兩人不在同一隊的組隊方法有多少種？

解：由於甲、乙不可在同一隊，可先將甲、乙各安排在兩個不同的隊中

則該二隊只需再各安排 2 人，所餘 3 人則安排在第三隊

因此組隊的方法有 $C_2^7 C_2^5 C_3^3 = 210$ 種

例題 7

(1) 將 6 本不同的參考書分成三堆，求下列情形各有幾種分法：

- ① 依 2 本，2 本，2 本分成三堆。
- ② 依 4 本，1 本，1 本分成三堆。
- ③ 依 1 本，2 本，3 本分成三堆。

(2) 將 6 本不同的參考書分給甲、乙、丙三人，求下列情形各有幾種分法：

- ① 依 2 本，2 本，2 本分給三人。
- ② 依 4 本，1 本，1 本分給三個人。
- ③ 依 1 本，2 本，3 本分給三人。
- ④ 分給甲 4 本，乙 1 本，丙 1 本。

解：(1) ① $\frac{C_2^6 \cdot C_2^4 \cdot C_2^2}{3!} = 15$ (種)

② $\frac{C_4^6 \cdot C_1^2 \cdot C_1^1}{2!} = 15$ (種)

③ $C_1^6 \cdot C_2^5 \cdot C_3^3 = 60$ (種)

(2) ① $\frac{C_2^6 \times C_2^4 \times C_2^2}{3!} \times 3! = 90$

② $\frac{C_4^6 \times C_1^2 \times C_1^1}{2!} \times 3! = 90$

③ $C_1^6 \times C_2^5 \times C_3^3 \times 3! = 360$

④ $\frac{C_4^6 \times C_1^2 \times C_1^1}{2!} \times 1 \times 2! = 30$

例題 8

假設有 5 個相同的蘋果分給 3 位同學每人可兼得或不取，試問有幾種分法？

解：○ | ○○ | ○○ 可視為用兩個隔板將 5 個相同的蘋果分堆，隔板和蘋果可視為不盡相

異物的直線排列 $\Rightarrow \frac{7!}{2!5!} = C_5^{3+5-1} = H_5^3 = 21$ (種)

例題 9

承上題，若每一位同學至少得一個蘋果，試問有幾種分法？

解： $5-3=2$ ，分法有 $H_2^3 = 6$ (種)

例題 10

方程式 $x+y+z+u=5$ ，則非負整數解有 _____ 組。

解： $H_5^4 = C_5^{4+5-1} = C_5^8 = 56$ (組)

(視為將 5 個相同的蘋果，分給 4 位不同的小朋友，可兼得亦可不得)

例題 11

(1) 將 7 件不同物品，放入 4 個相同箱子，每箱至少一個，有 _____ 種方法。

(2) 將 7 件相同物品，放入 4 個不同箱子，每箱至少一個，有 _____ 種方法。

解：(1) 7 件不同物品，放入 4 個相同箱子，先將整數 7 分割成 (1, 1, 1, 4)，(1, 1, 2, 3)，(1, 2, 2, 2)

取法	(1, 1, 1, 4)	(1, 1, 2, 3)	(1, 2, 2, 2)	合計
組合數	$\frac{C_1^7 C_1^6 C_1^5 C_4^4}{3!} = 35$	$\frac{C_1^7 C_1^6 C_2^5 C_3^3}{2!} = 210$	$\frac{C_1^7 C_2^6 C_2^4 C_2^2}{3!} = 105$	350

(2) 7 件相同物品，放入 4 個不同箱子，每箱至少一個，先每一箱分一物品

⇨ $7-4=3$ ，利用重複組合 $H_3^4 = C_3^6 = 20$ (種)

例題 12

方程式 $x+y+z=9$ ，則下列各情形各有幾組解？

- (1) 非負整數解有 _____ 組。
- (2) 正整數解有 _____ 組。
- (3) 若 $x \geq -3$ ， $y \geq -1$ ， $z > 1$ ，則有 _____ 組整數解。
- (4) 若 $x > 0$ ， $y \geq 1$ ， $z > 2$ ，則有 _____ 組正整數解。
- (5) 正奇數解有 _____ 組。
- (6) 若 $x+y+z \leq 9$ ，則非負整數解有 _____ 組。

解：(1) $H_9^3 = C_9^{11} = 55$ (組)

(2) 令 $x=x_0+1$ ， $y=y_0+1$ ， $z=z_0+1$ ($x_0, y_0, z_0 \in N \cup \{0\}$)

⇨ $x+y+z=9$ ⇨ $(x_0+1) + (y_0+1) + (z_0+1) = 9$ ⇨ $x_0+y_0+z_0=6$

⇨ $H_6^3 = C_6^8 = 28$ (組)

(3) $x=x_0-3$ ， $y=y_0-1$ ， $z=z_0+2$ ($x_0, y_0, z_0 \in N \cup \{0\}$)

∴ $x+y+z=9$ ⇨ $(x_0-3) + (y_0-1) + (z_0+2) = 9$

⇨ $x_0+y_0+z_0=11$ ⇨ $H_{11}^3 = C_{11}^{13} = 78$ (組)

(4) $x=x_0+1$ ， $y=y_0+1$ ， $z=z_0+3$ ($x_0, y_0, z_0 \in N \cup \{0\}$)

∴ $x+y+z=9$ ⇨ $x_0+1+y_0+1+z_0+3=9$ ⇨ $x_0+y_0+z_0=4$ ⇨ $H_4^3 = C_4^6 = 15$ (組)

(5) $x=2x_0+1$ ， $y=2y_0+1$ ， $z=2z_0+1$ ($x_0, y_0, z_0 \in N \cup \{0\}$)

∴ $x+y+z=9$ ⇨ $2x_0+1+2y_0+1+2z_0+1=9$ ⇨ $2(x_0+y_0+z_0) = 6$

∴ $x_0+y_0+z_0=3$ ⇨ $H_3^3 = C_3^5 = 10$ (組)

(6) $x+y+z \leq 9$ ⇨ $x+y+z+t=9$ ($x, y, z, t \in N \cup \{0\}$) ⇨ $H_9^4 = C_9^{12} = 220$ (組)