

2-3 排列

例題 1

設 $n \in N$ ，求滿足下列各式之 n ：

(1) $P_3^n : P_3^{n-1} = 5 : 4$. (2) $P_n^{10} = 4P_{n-1}^{10}$. (3) 若 $25P_3^n + P_4^{n+1} = 12P_3^{n+1}$.

解：(1) 若 $5P_3^{n-1} = 4P_3^n \Leftrightarrow 5(n-1)(n-2)(n-3) = 4n(n-1)(n-2)$

$\because n-1 \geq 3 \Leftrightarrow (n-1)(n-2) \neq 0 \therefore 5(n-3) = 4n \Leftrightarrow n = 15$

(2) $\frac{10!}{(10-n)!} = 4 \times \frac{10!}{[10-(n-1)]!} \Leftrightarrow (11-n)! = 4(10-n)!$

$\Leftrightarrow 11-n=4 \therefore n=7$

(3) $25 \times \frac{n!}{(n-3)!} + \frac{(n+1)!}{[(n+1)-4]!} = 12 \times \frac{(n+1)!}{[(n+1)-3]!}$

$\Leftrightarrow \frac{25}{(n-3)!} + \frac{n+1}{(n-3)!} = 12 \times \frac{n+1}{(n-2)!} \Leftrightarrow 25 + (n+1) = \frac{12(n+1)}{(n-2)}$

$\Leftrightarrow 25(n-2) + (n+1)(n-2) = 12(n+1)$

$\Leftrightarrow 25n - 50 + n^2 - n - 2 = 12n + 12 \Leftrightarrow n^2 + 12n - 64 = 0$

$\Leftrightarrow (n-4)(n+16) = 0 \Leftrightarrow n=4, -16 (n \geq 3) \therefore n=4$

例題 2

從 6 位同學中挑選 3 位擔任班長、副班長與風紀股長三種職務（一人只能擔任一種職務），有幾種方法？

解： 班長 副班長 風紀股長

選法有 $6 \times 5 \times 4 = 120$ (種)

例題 3

(1) 4 男 3 女排成一列，男女相間之排法有 _____ 種。

(2) 4 男 4 女排成一列，男女相間之排法有 _____ 種。

解：(1) 4 男 3 女排成一列，男女相間

其排法為男女男女男女男，方法數有 $4! \times 3! = 24 \times 6 = 144$ (種)

(2) 4 男 4 女，排成一列，男女相間其方式有兩種：

① 男女男女男女男女

② 女男女男女男女男 \Leftrightarrow ① + ② 得 $2 \times 4!4! = 1152$ (種)

例題 4

甲、乙、丙、丁、戊等 5 人排成一列，求下列各情形的不同方法數：

- (1) 任意排列。 (2) 任取其中三人排成一列。 (3) 甲乙丙必相鄰。
(4) 甲乙丙不全相鄰。 (5) 甲乙丙任二人不相鄰。 (6) 甲乙丙中恰二人相鄰。
(7) 甲乙不相鄰且丙丁不相鄰。

解：(1) 任意排列有 $5! = 120$ (種)

(2) $P_3^5 = 5 \times 4 \times 3 = 60$ (種)

(3) $\textcircled{\text{甲乙丙}}$ 丁戊

$3! \times 3! = 6 \times 6 = 36$ (種)

甲乙丙作直線排列

$\textcircled{\text{甲乙丙}}$ 丁戊，3 件物件作直線排列

(4) 甲乙丙不全相鄰 = 任意排 - (甲乙丙全相鄰) = $5! - 36 = 120 - 36 = 84$ (種)

(5) 甲 乙 丙

↓ ↓ ↓

○ 丁 ○ 戊 ○

先排丁、戊，再將甲、乙、丙插入空隙

⇨ $2! \times 3! = 12$ (種)

插入甲、乙、丙

先排丁、戊

(6) 甲、乙、丙恰有 2 人相鄰 = 全 - (三人相鄰) - (三人皆分開)

= $120 - 36 - 12 = 72$ (種)

(7) $\textcircled{\text{甲乙}}$ 戊 $\textcircled{\text{丙丁}}$

$n(\overline{\text{甲乙}} \cap \overline{\text{丙丁}})$

= $n(\overline{\text{甲乙} \cup \text{丙丁}}) = n(U) - [n(\text{甲乙}) + n(\text{丙丁}) - n(\text{甲乙} \cap \text{丙丁})]$

= $5! - [2! \times 4! + 2! \times 4! - 2! \times 2! \times 3!] = 120 - (48 + 48 - 24) = 48$ (種)

例題 5

今有 6 位朋友，則：

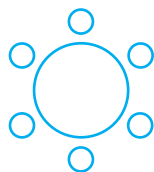
- (1) 圍一圓桌而坐有 _____ 種坐法。
- (2) 圍成長方形桌子，長邊各坐 2 人，短邊各坐 1 人有 _____ 種坐法。
- (3) 圍成正三角形桌子，每邊各坐 2 人，有 _____ 種坐法。

解：

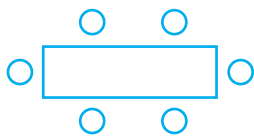
(1) 圖(一)：環狀排列： $\frac{6!}{6}=120$ (種)

(2) 圖(二)：長方形排列數： $\frac{6!}{2}=360$ (種)

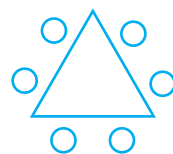
(3) 圖(三)：正三角形排列數： $\frac{6!}{3}=240$ (種)



圖(一)



圖(二)



圖(三)

例題 6

主人夫婦與賓客二對夫婦共六人圍一圓桌而坐，則下列各情形的坐法分別有幾種？

- (1) 任意入坐。
- (2) 男女相間而坐。
- (3) 每對夫婦相鄰。
- (4) 男女相間且夫婦相鄰。
- (5) 主人夫婦相對而坐。
- (6) 每對夫婦相對而坐。
- (7) 男女相間夫婦不全相鄰。
- (8) 男女相間但夫婦不相鄰。
- (9) 恰有二對夫婦相鄰。

解：

(1) $\frac{6!}{6}=5!=120$ (種)

(2) 男生先環狀排列 $\frac{3!}{3}=2$ ，
女生在兩男之間有 $3!=6$ ，

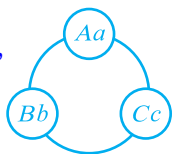
所求為 $\frac{3!}{3} \times 3! = 12$ (種)

(3) 每一對夫婦綁在一起，

環狀排列有 $\frac{3!}{3}=2$

每一對夫婦可以左右互換，
方法有 $2^3=8$

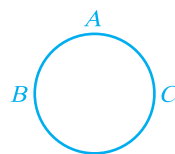
所求為 $\frac{3!}{3} \times 2^3 = 16$ (種)



(6) 男生先環排： $\frac{3!}{3}=2$

女生依序坐對面，
再將男女互換

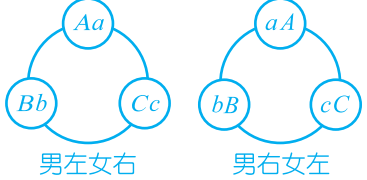
共有 $\frac{3!}{3} \times 2^2 = 8$ (種)



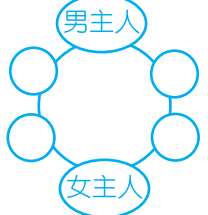
(7) (男女相間) - (男女相間且夫婦相鄰)

$= \frac{3!}{3} \times 3! - (\frac{3!}{3} \times 2)$

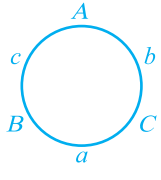
$= 12 - 4 = 8$ (種)

(4) 
 男左女右 男右女左

三對夫婦環狀排列有 $\frac{3!}{3} \times 2 = 4$ (種)

(5) 

所求為 $4! = 24$ (種)

(8) 

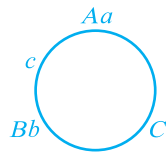
$\frac{3!}{3} \times 1 = 2$ (種)

第三對夫婦分開插空隙

(9) $\frac{P_2^3}{2} \times P_1^2 \times 2^2$
 相鄰的夫婦互換位子

三對夫婦中取 2 對作環排

所求為 $3 \times 2 \times 4 = 24$ (種)



例題 7

將“PROBABILITY” 11 個字母排成一列，則：

- (1) 其排列數有 _____ 種。
- (2) 若保持 P, R, O 次序，其排列數有 _____ 種。

解：(1) PROBABILITY 中有 2 個 B, 2 個 I, 利用不盡相異物的直線排列法

所求為 $\frac{11!}{2!2!} = 9979200$ (種)

- (2) P, R, O 三字視為相同物，將 $\square\square\square$ BABILITY 作直線排列之後再將 P, R, O 填入 $\square\square\square$ 中

所求為 $\frac{11!}{2!2!3!} = 1663200$ (種)

例題 8

將「庭院深深深幾許」七個字全取而排列，求下列各情況之方法數。

- (1) 任意排列。
- (2) 使其中三個「深」字不完全連在一起。
- (3) 使其中三個「深」字完全分開。
- (4) 使其中三個「深」字至少有兩個相鄰。
- (5) 使其中三個「深」字恰有兩個相鄰。

解：三個「深」

(1) 任意排列： $\frac{7!}{3!} = 840$ (種)

(2) 三個「深」完全相鄰的排法有：庭院 深深深 幾許 $\Rightarrow 5!$

所求 = 全 - (三個深完全相鄰) = $\frac{7!}{3!} - 5! = 840 - 120 = 720$ (種)

(3) $\begin{array}{ccccccc} \bigcirc & \text{庭} & \bigcirc & \text{院} & \bigcirc & \text{幾} & \bigcirc & \text{許} & \bigcirc \\ & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & & \\ & \text{深} & & \text{深} & & \text{深} & & & \end{array}$

先將「庭」、「院」、「幾」、「許」作直排再將三個「深」插入空隙

其方法數為 $4! \cdot \frac{P_3^5}{3!} = 240$ (種)

(4) 全 - (完全不相鄰) = $840 - 240 = 600$ (種)

(5) 恰有兩個「深」相鄰 = 全 - (完全分開) - (完全相鄰)
= $840 - 240 - 120 = 480$ (種)

例題 9

甲、乙、丙、丁、戊、己等 6 人排成一列，則：

- (1) 規定甲一定在乙右方之排法有幾種？
- (2) 甲在乙之左方，乙又在丙之左之排法有幾種？
- (3) 甲在乙和丙之左之排法共有幾種？
- (4) 甲必排在乙丙之左，且丁必排在乙丙之右的排法共有幾種？
- (5) 甲在乙之左，丙在丁之左，戊與己相鄰之排法共有幾種？

解：

(1) 甲、乙視為同物， $\square\square$ 丙丁戊己，排法： $\frac{6!}{2!} = 360$ (種)

(2) 甲、乙、丙視為同物， $\square\square\square$ 丁戊己，排法： $\frac{6!}{3!} = 120$ (種)

(3) 依題意 $\left. \begin{array}{l} \textcircled{\text{甲}}、\textcircled{\text{乙}}、\textcircled{\text{丙}} \\ \textcircled{\text{甲}}、\textcircled{\text{丙}}、\textcircled{\text{乙}} \end{array} \right\}$ 有 2 種，再將 $\textcircled{\text{甲}}、\textcircled{\text{乙}}、\textcircled{\text{丙}}$ 視為同物

所求為 $\square\square\square$ 丁戊己，有 $\frac{6!}{3!} \times 2! = 240$ (種)

(4) 依題意 $\left\{ \begin{array}{l} \textcircled{\text{甲}}、\textcircled{\text{乙}}\textcircled{\text{丙}}、\textcircled{\text{丁}} \\ \textcircled{\text{甲}}、\textcircled{\text{丙}}\textcircled{\text{乙}}、\textcircled{\text{丁}} \end{array} \right\}$ 2 種，再將 $\textcircled{\text{甲}}、\textcircled{\text{乙}}、\textcircled{\text{丙}}、\textcircled{\text{丁}}$ 視為同物

所求即為○○○○戊己 \Rightarrow 共有 $\frac{6!}{4!} \times 2 = 60$ (種)

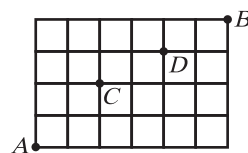
(5) 將甲、乙視為同物，丙、丁視為同物，戊、己綁一起

$$\text{所求} = \frac{5!}{2! \cdot 2!} \times 2! = 60 \text{ (種)}$$

戊、己
↑
甲、乙 丙、丁

例題 10

如右圖，棋盤形街道，一人由 A 走到對角 B 要取捷徑，求下列之走法數。



- (1) 有幾種不同之走法？
- (2) 每次需經過 D 之走法有幾種？
- (3) 經過 C 且經過 D 之走法有幾種？
- (4) 不經過 C 且不經過 D 之走法有幾種？

解：(1) 走捷徑只能向右，向上走，即 \rightarrow, \uparrow

A 走到 B 的捷徑走法可視為 ($\uparrow \uparrow \uparrow \uparrow \rightarrow \rightarrow \rightarrow \rightarrow \rightarrow$) 的直線排列排法有

$$\frac{10!}{6! \times 4!} = 210 \text{ (種)}$$

$$(2) A \rightarrow D \rightarrow B : \frac{7!}{4! \times 3!} \times \frac{3!}{2! \times 1!} = 105 \text{ (種)}$$

$$(3) A \rightarrow C \rightarrow D \rightarrow B : \frac{4!}{2! \times 2!} \times \frac{3!}{2! \times 1!} \times \frac{3!}{2! \times 1!} = 54 \text{ (種)}$$

$$(4) n(C' \cap D') = n(C \cup D)' = n(U) - n(C \cup D) \\ = n(U) - [n(C) + n(D) - n(C \cap D)]$$

$$\therefore A \rightarrow C \rightarrow B : \frac{4!}{2! \times 2!} \times \frac{6!}{4! \times 2!} = 90$$

$$\therefore \text{所求為 } 210 - 105 - 90 + 54 = 69 \text{ (種)}$$

例題 11

- (1) 將 5 封信，任意投入 3 個郵筒，有 _____ 種投法。
- (2) 有渡船 3 艘，每艘可載 6 人，今有 5 人要同時安全渡河，則有 _____ 種方法。
- (3) 投擲一粒骰子 4 次，則所出現點數的排列數為 _____。
- (4) 容許重複使用數字 0, 1, 2, 3，則可作出 _____ 個三位數。
- (5) 設有 3 件不同禮物送給 5 位同學可兼得，則有 _____ 種得獎情形。

解：(1) 設 5 封信，分別為 A, B, C, D, E ，且每一封信皆有 3 個不同的郵筒可供選擇

$$A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow D \rightarrow E$$

$$\text{投法有 } 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 = 3^5 = 243 \text{ (種)}$$

- (2) 設 5 人分別為 A, B, C, D, E ，每一人皆有 3 艘不同的船可供選擇，則

$$A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow D \rightarrow E$$

$$\text{搭船有 } 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 = 3^5 = 243 \text{ (種)}$$

- (3) 每一粒骰子可能出現的點數有 6 種，投擲 4 次
共有 $6^4 = 1296$ (種)

(4) 設三位數為 $a \times 10^2 + b \times 10 + c$ ，其中 $a \in \{1, 2, 3\}$ ， $b \in \{0, 1, 2, 3\}$ ， $c \in \{0, 1, 2, 3\}$

$$\boxed{a} \boxed{b} \boxed{c} \rightarrow 3 \times 4 \times 4 = 48 \text{ (種)}$$

(5) 3 件不同的禮物，可分送給 5 個不同的同學

$$\boxed{A} \boxed{B} \boxed{C} \rightarrow 5 \times 5 \times 5 = 125 \text{ (種)}$$