

例題 1

將 1000 元大鈔換成 100 元, 200 元, 500 元的小鈔, 換法有_____種。

解：設 100 元鈔票有 x 張, 200 元鈔票有 y 張, 500 元鈔票有 z 張

$$100x + 200y + 500z = 1000 \Leftrightarrow x + 2y + 5z = 10 \quad (x, y, z \in \mathbb{N} \cup \{0\})$$

(1) $z=0$

x	10	8	6	4	2	0
y	0	1	2	3	4	5
z	0	0	0	0	0	0

(2) $z=1$

x	5	3	1
y	0	1	2
z	1	1	1

(3) $z=2$

x	0
y	0
z	2

共有 10 種換法

例題 2

能滿足 $x + 2y + 3z = 20$ 之正整數 x, y, z 有_____組。

解：先從係數最大的變數討論

(1) $z=1 \Leftrightarrow x + 2y = 17$,

x	15	13	11	9	7	5	3	1
y	1	2	3	4	5	6	7	8

 \therefore 有 8 組

(2) $z=2 \Leftrightarrow x + 2y = 14$,

x	12	10	8	6	4	2
y	1	2	3	4	5	6

 \therefore 有 6 組

(3) $z=3 \Leftrightarrow x + 2y = 11$,

x	9	7	5	3	1
y	1	2	3	4	5

 \therefore 有 5 組

(4) $z=4 \Leftrightarrow x + 2y = 8$,

x	6	4	2
y	1	2	3

 \therefore 有 3 組

(5) $z=5 \Leftrightarrow x + 2y = 5$,

x	3	1
y	1	2

 \therefore 有 2 組

共有 $8 + 6 + 5 + 3 + 2 = 24$ (組)

例題 3

$A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{a, b, c, d\}$, 若 $x \in A, y \in B$, 則數對 (x, y) 共有 _____ 個。

解: $A \times B = \{(x, y) \mid x \in A, y \in B\}$

$$\therefore n(A \times B) = n(A) \times n(B) = 3 \times 4 = 12 \text{ (個)}$$

例題 4

求: (1) $(1+x+x^2)(1+y)(1+z)$ 的展開式共有 _____ 項。

(2) $(a+b+c+d)(e+f+g)(x+y+z+u+v)$ 的展開式共有 _____ 項。

解: (1) $3 \times 2 \times 2 = 12$ (項)

(2) $4 \times 3 \times 5 = 60$ (項)

例題 5

設二次函數 $y = ax^2 + bx + c$ 的係數為 a, b, c , 若已知 $a, b, c \in \{2, 5, 8\}$, 試問共有 _____ 種不同的二次函數。

解: $a \in \{2, 5, 8\}$, a 有 3 種數值

$b \in \{2, 5, 8\}$, b 有 3 種數值

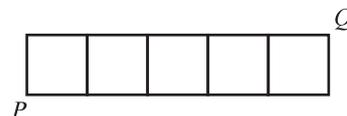
$c \in \{2, 5, 8\}$, c 有 3 種數值

\therefore 序組 (a, b, c) 共有 $3 \times 3 \times 3 = 27$ 種情形

$\therefore y = ax^2 + bx + c$ 共有 27 種不同的二次函數

例題 6

如右圖的街道圖, 從 P 走到 Q , 只規定不許向左走, 且同一點不許經過兩次, 則從 P 走到 Q 共有 _____ 種走法。



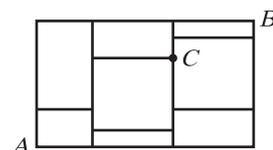
解:

由 P 到 \overline{AB} 有 2 種走法, 同理 \overline{AB} 上任一點走到 \overline{CD} 也有 2 種走法,

以此類推, \dots , 依題意共有 $2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 2^5 = 32$ 種走法

例題 7

(1) 如右圖， A 至 B ，走過的不可再走，只准向右或上下移動，則走法有_____種。

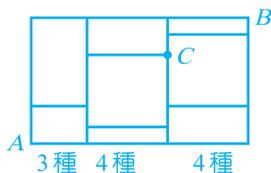


(2) 上題之走法中不經過 C 的有_____種。

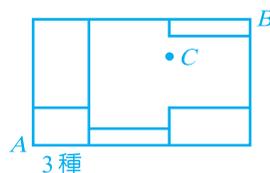
解：(1) $A \rightarrow B$ ：如圖(一)， $3 \times 4 \times 4 = 48$ (種)

(2) 拆去經 C 之路徑如圖(二)

$$3 \times (1 \times 2 + 2 \times 2) = 3 \times 6 = 18 \text{ (種)}$$



圖(一)



圖(二)

例題 8

有一隻青蛙在數線上 a, b, c, d, e, f 等六個相異點上跳動，每次跳動的落點異於跳點，若此青蛙從 a 點開始起跳，跳四次後仍回到 a 點，求青蛙共有_____種跳法。

解：青蛙從 a 起跳，跳躍四次，其著地點可分為下列兩種：

$$\text{中間必過 } a : a \square a \square a \Rightarrow 5 \times 5 = 25$$

$$\text{中間必不過 } a : a \square \square \square a \Rightarrow 5 \times 4 \times 4 = 80$$

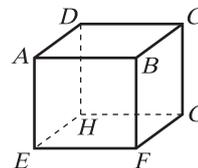
$$\text{共有 } 25 + 80 = 105 \text{ (種)}$$

例題 9

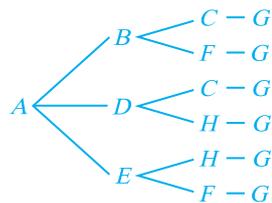
一隻螞蟻沿右圖正六面體的稜線走，由 A 出發到 G ，

(1) 取捷徑的方法共有_____種。

(2) 不一定取捷徑，可以任意走，但同一點不得通過兩次，共有_____種走法。

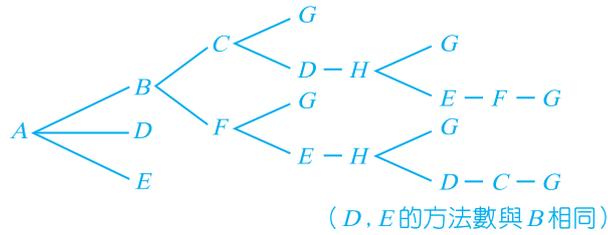


解：(1)



$$\text{共有 } 3 \times 2 = 6 \text{ (種)}$$

(2)

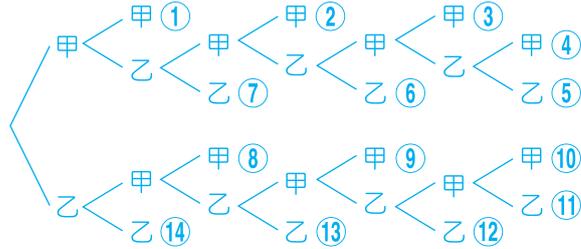


共有 $3 \times 6 = 18$ (種)

例題 10

甲、乙二人比賽羽毛球，每場不得和局，凡是先連贏兩場或先勝四場者，則贏得比賽，則比賽的勝、負過程共有_____種。(分析：使用樹形圖)

解：

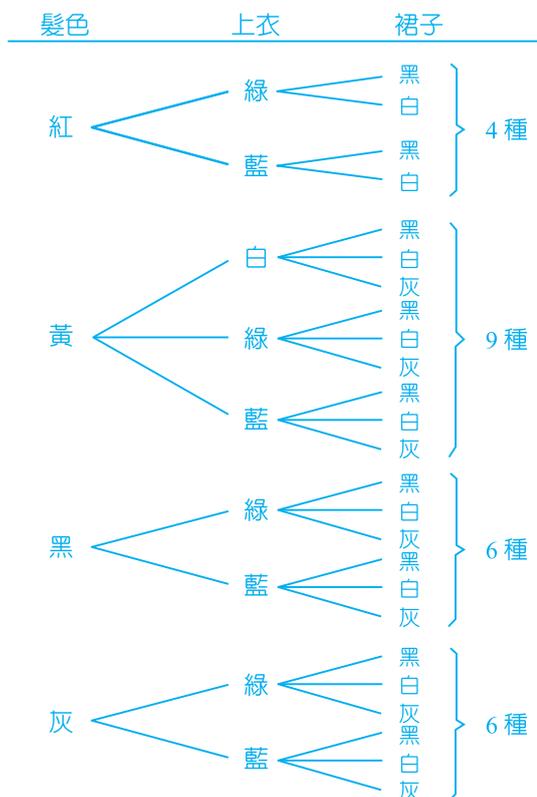


共有 14 種

例題 11

某玩具公司生產多種款式的「芭比娃娃」，各種款式只是頭髮、上衣或裙子顏色不同。其中頭髮共有紅、黃、黑、灰四種顏色，上衣有白、綠、藍三種顏色，而裙子有黑、白、灰三種顏色。公司決定紅色的頭髮不搭配灰色的裙子，而白色的上衣則必須搭配黃色的頭髮，至於其他顏色間的搭配就沒有限制。在這些配色的要求之下，最多可有_____種不同款式的「芭比娃娃」。

解：



故有 $4+9+6+6=25$ (種)

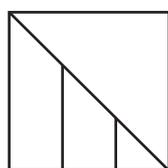
例題 12

以五種不同顏色，塗下列各圖形的區域，每一區域限塗一色，顏色可以重複使用，相鄰部分不得同色，其塗法各有幾種？

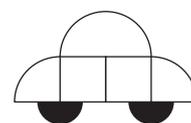
(1)



(2)



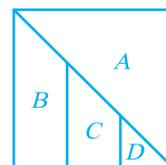
(3)



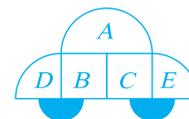
解：(1) 依 $A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow D$ 順序著色
有 $5 \times 4 \times 4 \times 4 = 320$ (種)



(2) 依 $A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow D$ 順序著色
有 $5 \times 4 \times 3 \times 3 = 180$ (種)



(3) 依 $A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow D \rightarrow E$ 順序著色
有 $5 \times 4 \times 3 \times 4 \times 4 = 960$ (種)

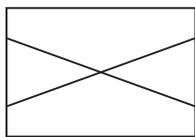


例題 13

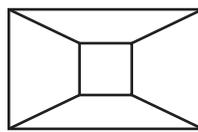
用 6 種顏色的廣告顏料，塗下列各圖形，若相鄰區域不同色可重複使用，則：

(1) 圖(一)有 _____ 種塗法。

(2) 圖(二)有 _____ 種塗法。



圖(一)



圖(二)

解：(1) 考慮 A, C 同色： $A \rightarrow C \rightarrow B \rightarrow D = 6 \times 1 \times 5 \times 5 = 150$

A, C 異色： $A \rightarrow C \rightarrow B \rightarrow D = 6 \times 5 \times 4 \times 4 = 480$

共有 $150 + 480 = 630$ (種)

(2) 考慮 $A \rightarrow B \rightarrow D \rightarrow C \rightarrow E$

B, D 同色： $6 \times 5 \times 1 \times 4 \times 4 = 480$

B, D 異色： $6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 3 = 1080$

共有 $480 + 1080 = 1560$ (種)

