

例題 1

設 A 與 B 都是字集 U 的部分集合，且已知 $n(U) = 30$ ， $n(A) = 17$ ， $n(B) = 15$ ， $n(A \cap B) = 10$ ，則：

- (1) $n(A') =$ _____ . (2) $n(A \cup B) =$ _____ .
 (3) $n(A' \cap B') =$ _____ . (4) $n(A' \cap B) =$ _____ .

解： (1) $n(A') = n(U) - n(A) = 30 - 17 = 13$

$$(2) n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) = 17 + 15 - 10 = 22$$

$$(3) n(A' \cap B') = n(U) - n(A \cup B) = 30 - 22 = 8$$

$$(4) n(A' \cap B) = n(B \cap A') = n(B) - n(A \cap B) \\ = 15 - 10 = 5$$

例題 2

已知集合 A 與集合 B ，設 $n(A) = 7$ ， $n(A \cup B) = 11$ ，求 $n(A \cap B)$ 的範圍。

解： $\because n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$

$$\therefore n(B) - n(A \cap B) = n(A \cup B) - n(A) = 11 - 7 = 4$$

$$\Leftrightarrow n(B) = 4 + n(A \cap B)$$

$$\text{又 } n(B) \leq n(A \cup B) \Leftrightarrow 4 + n(A \cap B) \leq 11 \Leftrightarrow n(A \cap B) \leq 7$$

$$\text{又 } n(A \cap B) \geq 0 \quad \therefore 0 \leq n(A \cap B) \leq 7$$

例題 3

從 1 到 100 的自然數中，

- (1) 是 4 的倍數或是 6 的倍數的有 _____ 個。
 (2) 不是 4 的倍數也不是 6 的倍數的有 _____ 個。

解： 1 到 100 的自然數中，4 的倍數所成集合為 A ，6 的倍數所成集合為 B

$$\text{則 } n(A) = \left[\frac{100}{4} \right] = 25, n(B) = \left[\frac{100}{6} \right] = 16, n(A \cap B) = \left[\frac{100}{12} \right] = 8$$

$$(1) n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) = 25 + 16 - 8 = 33 \text{ (個)}$$

$$(2) n(A' \cap B') = n(A \cup B)' = n(U) - n(A \cup B) = 100 - 33 = 67 \text{ (個)}$$

例題 4

某班學生第一次段考，國文、英文、數學成績不及格人數分別為 8 位、15 位與 20 位，國文、英文兩科都不及格的有 3 位，國文、數學兩科都不及格的有 4 位，英文、數學兩科都不及格的有 6 位，國文、英文、數學三科都不及格的有 2 位，則全班國文、英文、數學三科至少有一科不及格的有_____人。

解：設 A ：國文不及格的集合， B ：英文不及格的集合， C ：數學不及格的集合

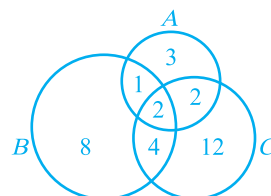
$$\text{即 } n(A) = 8, n(B) = 15, n(C) = 20,$$

$$n(A \cap B) = 3, n(A \cap C) = 4, n(B \cap C) = 6,$$

$$n(A \cap B \cap C) = 2, \text{ 其文氏圖如右：}$$

三科至少有一科不及格的人數為

$$n(A \cup B \cup C) = 3 + 1 + 2 + 2 + 8 + 4 + 12 = 32 \text{ (人)}$$



例題 5

從 1 到 1000 的正整數中，求：

- (1) 是 2 且是 3 的倍數者，共有_____個。
- (2) 是 2 或是 3 的倍數者，共有_____個。
- (3) 不是 2 的倍數但是 3 的倍數者，共有_____個。
- (4) 不是 2 且不是 3 的倍數者，共有_____個。
- (5) 與 30 互質者，共有_____個。

解：1 到 1000 的正整數中， A 表 2 的倍數所成的集合， B 表 3 的倍數所成的集合

$$\text{即 } n(A) = \left\lfloor \frac{1000}{2} \right\rfloor = 500, n(B) = \left\lfloor \frac{1000}{3} \right\rfloor = 333,$$

$$(1) n(A \cap B) = \left\lfloor \frac{1000}{6} \right\rfloor = 166 \text{ (個)}$$

$$(2) n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) = 500 + 333 - 166 = 667 \text{ (個)}$$

$$(3) n(A' \cap B) = n(B) - n(A \cap B) = 333 - 166 = 167 \text{ (個)}$$

$$(4) n(A' \cap B') = n(A \cup B)' = n(U) - n(A \cup B) = 1000 - 667 = 333 \text{ (個)}$$

(5) $30 = 2 \times 3 \times 5$ ，若 C 表 1 到 1000 的正整數中，5 的倍數所成集合

$$n(C) = \left\lfloor \frac{1000}{5} \right\rfloor = 200, n(A \cap C) = \left\lfloor \frac{1000}{10} \right\rfloor = 100, n(B \cap C) = \left\lfloor \frac{1000}{15} \right\rfloor = 66,$$

$$n(A \cap B \cap C) = \left\lfloor \frac{1000}{30} \right\rfloor = 33$$

$$\text{即 } n(A \cup B \cup C) = 500 + 333 + 200 - 166 - 66 - 100 + 33 = 734$$

$$\begin{aligned} \text{所求 } n(A' \cap B' \cap C') &= n(A \cup B \cup C)' = n(U) - n(A \cup B \cup C) \\ &= 1000 - 734 = 266 \text{ (個)} \end{aligned}$$