高中數學第四冊二下

第一章_圓錐曲線1-4_雙曲線

01.完成下列表格：

雙曲線Γ	$9x^2-16y^2=144$	$4x^2-9y^2+36=0$
中　心		
焦　點		
頂　點		
正焦弦長		
貫軸方程式		
共軛軸方程式		
貫軸長		
共軛軸長		
漸近線		
$P\in\Gamma$，L_1，L_2 表示兩漸近線，$d(P,L_1)\times d(P,L_2)$		

雙曲線Γ	$4x^2-y^2+8x+4y+4=0$	$\left\vert\sqrt{(x-5)^2+y^2}-\sqrt{(x+5)^2+y^2}\right\vert=8$
中　心		
焦　點		
頂　點		
正焦弦長		
貫軸方程式		
共軛軸方程式		
貫軸長		
共軛軸長		
漸近線		
$P\in\Gamma$，L_1，L_2 表示兩漸近線，$d(P,L_1)\times d(P,L_2)$		

答案：

雙曲線Γ	$9x^2-16y^2=144$	$4x^2-9y^2+36=0$
中　心	（0，0）	（0，0）
焦　點	（±5，0）	（0，$\pm\sqrt{13}$）
頂　點	（±4，0）	（0，±2）
正焦弦長	$\frac{9}{2}$	9
貫軸方程式	$y=0$	$x=0$
共軛軸方程式	$x=0$	$y=0$
貫軸長	8	4
共軛軸長	6	6
漸近線	$\begin{cases}3x+4y=0\\3x-4y=0\end{cases}$	$\begin{cases}2x+3y=0\\2x-3y=0\end{cases}$
$P\in\Gamma$，L_1，L_2 表示兩漸近線，d（P，L_1）× d（P，L_2）	$\frac{144}{25}$	$\frac{36}{13}$

雙曲線Γ	$4x^2-y^2+8x+4y+4=0$	$\left\|\sqrt{(x-5)^2+y^2}-\sqrt{(x+5)^2+y^2}\right\|=8$
中　心	（−1，2）	（0，0）
焦　點	（−1，$2\pm\sqrt{5}$）	（5，0），（−5，0）
頂　點	（−1，0），（−1，4）	（4，0），（−4，0）
正焦弦長	1	$\frac{9}{2}$
貫軸方程式	$x=-1$	$y=0$
共軛軸方程式	$y=2$	$x=0$
貫軸長	4	8
共軛軸長	2	6
漸近線	$\begin{cases}2x+y=0\\2x-y+4=0\end{cases}$	$y=\pm\frac{3}{4}x$
$P\in\Gamma$，L_1，L_2 表示兩漸近線，d（P，L_1）× d（P，L_2）	$\frac{4}{5}$	$\frac{144}{25}$

02.試判斷下列方程式圖形：

（1）$\left|\sqrt{(x-1)^2+(y-1)^2}-\sqrt{x^2+(y+1)^2}\right|=3$。

（2）$\left|\sqrt{(x-1)^2+(y-1)^2}-\sqrt{x^2+(y+1)^2}\right|=\sqrt{5}$。

（3）$\left|\sqrt{(x-1)^2+(y-1)^2}-\sqrt{x^2+(y+1)^2}\right|=2$。

答案：令 F_1（1，1），F_2（0，－1），$\overline{F_1F_2}=\sqrt{5}$，P（x，y）

（1）$\left|\overline{PF_1}-\overline{PF_2}\right|=3=2a$，$\overline{F_1F_2}<2a$，沒有圖形

（2）$\left|\overline{PF_1}-\overline{PF_2}\right|=\sqrt{5}=2a$，$\overline{F_1F_2}=2a$，兩射線

（3）$\left|\overline{PF_1}-\overline{PF_2}\right|=2=2a$，$\overline{F_1F_2}>2a$，雙曲線

答：(1)沒有圖形；(2)兩射線；(3)雙曲線

03.(1)試證：雙曲線 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$（a＞0，b＞0）上任一點至兩條漸近線之距離乘積為 $\frac{a^2b^2}{a^2+b^2}$。

(2)雙曲線 $x^2-4y^2=4$ 上任一點至兩條漸近線之距離乘積為何？

答案：(1)設漸近線方程式為 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=0\Rightarrow$ 兩條漸近線為$\begin{cases}L_1：bx+ay=0\\L_2：bx-ay=0\end{cases}$

令 P（x_0，y_0）∈Γ：$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1\Rightarrow b^2{x_0}^2-a^2{y_0}^2=a^2b^2$

所求 d（P，L_1）×d（P，L_2）$=\frac{|bx_0+ay_0|}{\sqrt{a^2+b^2}}\times\frac{|bx_0-ay_0|}{\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{b^2{x_0}^2-a^2{y_0}^2}{a^2+b^2}=\frac{a^2b^2}{a^2+b^2}$

(2)$x^2-4y^2=4\Rightarrow\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{1}=1\Rightarrow a^2=4$，$b^2=1$，所求為 $\frac{a^2b^2}{a^2+b^2}=\frac{4\times1}{4+1}=\frac{4}{5}$

答：(2)$\frac{4}{5}$

04.一雙曲線之兩漸近線為 x－y＋3＝0 與 x＋2y－2＝0，且過（1，3），則此雙曲線的方程式為【　　】。

答案：（x－y＋3）（x＋2y－2）＝5

解析：設雙曲線方程式為（x－y＋3）（x＋2y－2）＝k，過（1，3）

（1－3＋3）（1＋6－2）＝k　∴k＝5

∴所求為（x－y＋3）（x＋2y－2）＝5

05.一雙曲線的方程式為 $9x^2-4y^2+18x+12y-144=0$，則：

(1)中心坐標為【　　　　】。

(2)其兩漸近線方程式為【　　　　】。

(3)其共軛雙曲線為【　　　　】。

答案：(1)（－1，$\frac{3}{2}$）；(2) 3x＋2y＝0，3x－2y＋6＝0；(3)$9x^2-4y^2+18x+12y+144=0$

解析：(1)$9(x^2+2x+1)-4(y^2-3y+\frac{9}{4})=144\Rightarrow 9(x+1)^2-4(y-\frac{3}{2})^2=144$

$\Rightarrow\frac{(x+1)^2}{16}-\frac{(y-\frac{3}{2})^2}{36}=1$，中心為（－1，$\frac{3}{2}$）

(2)漸近線方程式為 $\frac{(x+1)^2}{16}-\frac{(y-\frac{3}{2})^2}{36}=0$

$\Rightarrow\frac{x+1}{4}+\frac{y-\frac{3}{2}}{6}=0$ 或 $\frac{x+1}{4}-\frac{y-\frac{3}{2}}{6}=0\Rightarrow\begin{cases}L_1:3x+2y=0\\L_2:3x-2y+6=0\end{cases}$

(3)共軛雙曲線為 $\frac{(x+1)^2}{16}-\frac{(y-\frac{3}{2})^2}{36}=-1\Rightarrow 9x^2-4y^2+18x+12y+144=0$

06.已知雙曲線Γ與 $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{21}=1$ 有共同焦點，且其貫軸長為 6，試求雙曲線Γ的方程式。

答案：已知 $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{21}=1$ 的中心為（0，0），貫軸在 x 軸上

且 $a^2=4$，$b^2=21$　$\therefore c^2=4+21=25$

其共焦點的雙曲線亦為  左右型，且貫軸長為 6

可假設雙曲線 Γ：$\frac{x^2}{3^2}-\frac{y^2}{b'^2}=1$，利用 $3^2+b'^2=25 \Rightarrow b'^2=16$

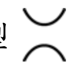
$\therefore \Gamma$：$\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1$

07. 試求貫軸長為 2，且與橢圓 $16(x+1)^2+9(y+2)^2=144$ 有共同焦點的雙曲線方程式為【　】。

答案：$\frac{(y+2)^2}{1}-\frac{(x+1)^2}{6}=1$

解析：橢圓 $\frac{(x+1)^2}{9}+\frac{(y+2)^2}{16}=1$ 為直立型 

$\therefore a^2=16$，$b^2=9$，$c^2=a^2-b^2=7$

其共焦點的雙曲線亦為直立型  $\Rightarrow$ 可假設為 $\frac{(y+2)^2}{1}-\frac{(x+1)^2}{b'^2}=1$

利用 $1+b'^2=7$　$\therefore b'^2=6$，所求為 $\frac{(y+2)^2}{1}-\frac{(x+1)^2}{6}=1$

08. 試就實數 m 的範圍，討論直線 L：$y=mx+1$ 與雙曲線 $4x^2-y^2=4$ 的相交情形：

（1）【　　　　】，相交於兩點。

（2）【　　　　】，相切一點。

（3）【　　　　】，不相交。

答案：（1）$-\sqrt{5}<m<\sqrt{5}$ 且 $m\neq\pm2$；（2）$m=\pm\sqrt{5}$；（3）$m<-\sqrt{5}$ 或 $m>\sqrt{5}$

解析：$\begin{cases} y=mx+1 \\ 4x^2-y^2=4 \end{cases}$ 聯立解之，$4x^2-(mx+1)^2=4 \Rightarrow (4-m^2)x^2-2mx-5=0$

$D=b^2-4ac$

$\Rightarrow D=(-2m)^2-4(4-m^2)(-5)=4m^2+20(4-m^2)=-16m^2+80$

（1）$D>0$，$-16m^2+80>0 \Rightarrow m^2<5 \Rightarrow -\sqrt{5}<m<\sqrt{5}$ 且 $m\neq\pm2$，表相交兩點

（2）$D=0$，$m=\pm\sqrt{5}$，表 L 與雙曲線相切

（3）$D<0$，$m<-\sqrt{5}$ 或 $m>\sqrt{5}$，表 L 與雙曲線不相交

09. 若直線 L 的斜率為 2，且與 $\frac{x^2}{5}+\frac{y^2}{3}=1$ 相切，則直線 L 之方程式為【　　　　】。

答案：$y=2x\pm\sqrt{23}$

解析：設直線 L 的方程式為 $y=2x+k$

$\begin{cases} y=2x+k \\ \frac{x^2}{5}+\frac{y^2}{3}=1 \end{cases}$ 聯立解之，得 $\frac{x^2}{5}+\frac{(2x+k)^2}{3}=1 \Rightarrow 23x^2+20kx+5k^2-15=0$

利用判別式 $D=b^2-4ac=0 \Rightarrow (20k)^2-4\times23\times(5k^2-15)=0 \Rightarrow k^2=23 \Rightarrow k=\pm\sqrt{23}$

所求為 $y=2x\pm\sqrt{23}$

10. 試求經過點 M（$8\sqrt{2}$，10）且與雙曲線 $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{25}=1$ 有共同漸近線的雙曲線方程式。

解：

答案：與 $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{25}=1$ 有共同漸近線的雙曲線可假設為 Γ：$\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{25}=k$

已知 M（$8\sqrt{2}$，10）$\in\Gamma\Rightarrow\frac{(8\sqrt{2})^2}{16}-\frac{10^2}{25}=k$　$\therefore k=4$

$\therefore\Gamma$：$\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{25}=4\Rightarrow\frac{x^2}{64}-\frac{y^2}{100}=1$

11.某一雙曲線以 $2x+y=0$，$2x-y+4=0$ 為漸近線，且以（-1，$2-\sqrt{5}$）為一焦點。試求

（1）對稱中心。

（2）貫軸所在直線的方程式。

（3）雙曲線方程式。

答案：（1）已知 $\begin{cases}2x+y=0\\2x-y+4=0\end{cases}$ 為其漸近線，其交點即為對稱中心，聯立解之得中心（-1，2）

（2）對稱中心（-1，2）與焦點（-1，$2-\sqrt{5}$）皆在貫軸上

故貫軸為 $x+1=0$，此雙曲線為直立型 

（3）雙曲線 Γ 可設為（$2x+y$）（$2x-y+4$）$=k$

$4(x+1)^2-(y-2)^2=k$

$\therefore\Gamma$：$\frac{(y-2)^2}{|k|}-\frac{(x+1)^2}{\frac{|k|}{4}}=1$

又 $\overline{OF}=\sqrt{5}$，利用 $a^2+b^2=c^2\Rightarrow|k|+\frac{|k|}{4}=5$　$\therefore|k|=4$

所求為 $\frac{(y-2)^2}{4}-\frac{(x+1)^2}{1}=1$