高中數學第四冊二下

第一章_圓錐曲線1-3_橢圓

01.求橢圓 $\sqrt{(x+2)^2+(y-1)^2}+\sqrt{(x-4)^2+(y-1)^2}=10$ 的

（1）焦點。

（2）中心。

（3）長軸長。

（4）頂點。

（5）長軸所在直線。

解：

答案：（1）焦點 $F_1(-2, 1)$，$F_2(4, 1)$

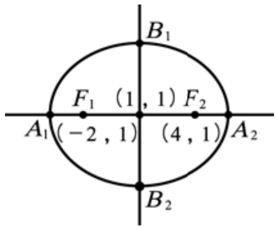
（2）中心為（$\dfrac{-2+4}{2}$，$\dfrac{1+1}{2}$）＝（1，1）

（3）長軸長為 $2a=10$

（4）$A_1=(1-5, 1)=(-4, 1)$，$A_2=(1+5, 1)=(6, 1)$

$B_1=(1, 1+4)=(1, 5)$，$B_2=(1, 1-4)=(1, -3)$

（5）長軸所在直線為 $y=1$



答：（1）（−2，1），（4，1）；（2）（1，1）；（3）10；（4）（−4，1），（6，1），（1，5），（1，−3）；（5）y＝1

02.方程式 $\sqrt{(x-1)^2+(y-1)^2}+\sqrt{(x-5)^2+(y-4)^2}=2a$（a 為正實數）

（1）表一橢圓，則 a 值的範圍為【　　　　】。

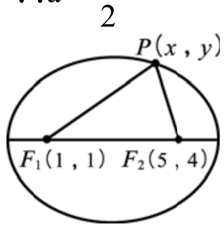
（2）表一線段，則 a 值的範圍為【　　　　】。

答案：（1）$a>\dfrac{5}{2}$；（2）$a=\dfrac{5}{2}$

解析：（1）$F_1(1, 1)$，$F_2(5, 4)$，$\overline{F_1F_2}=\sqrt{(5-1)^2+(4-1)^2}=5$

若 $\overline{F_1F_2}<2a$ 表橢圓　$\therefore a>\dfrac{5}{2}$

（2）若 $\overline{F_1F_2}=2a$ 表一線段，$5=2a$　$\therefore a=\dfrac{5}{2}$



03.完成下列表格：

橢圓方程式	中　心	焦　點
(1) $4x^2+36y^2=36$		
(2) $36x^2+4y^2=36$		
(3) $\frac{(x+3)^2}{9}+\frac{(y-2)^2}{1}=1$		
(4) $\sqrt{x^2+y^2}+\sqrt{(x-6)^2+(y-8)^2}=20$		

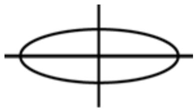
橢圓方程式	對稱軸長	兩焦點間距離	正焦弦長
(1) $4x^2+36y^2=36$			
(2) $36x^2+4y^2=36$			
(3) $\frac{(x+3)^2}{9}+\frac{(y-2)^2}{1}=1$			
(4) $\sqrt{x^2+y^2}+\sqrt{(x-6)^2+(y-8)^2}=20$			

答案：

橢圓方程式	中　心	焦　點
(1) $4x^2+36y^2=36$	(0，0)	$(\pm 2\sqrt{2}, 0)$
(2) $36x^2+4y^2=36$	(0，0)	$(0, \pm 2\sqrt{2})$
(3) $\frac{(x+3)^2}{9}+\frac{(y-2)^2}{1}=1$	(－3，2)	$(-3\pm 2\sqrt{2}, 2)$
(4) $\sqrt{x^2+y^2}+\sqrt{(x-6)^2+(y-8)^2}=20$	(3，4)	(0，0)，(6，8)

橢圓方程式	對稱軸長	兩焦點間距離	正焦弦長
$4\sqrt{2}$ (1)$4x^2+36y^2=36$	2 長軸 6 3 短軸 2		
$4\sqrt{2}$ (2)$36x^2+4y^2=36$	2 長軸 6 3 短軸 2		
(3) ＋ $4\sqrt{2}$ ＝1	2 長軸 6 3 短軸 2		
(4) ＋ $10\sqrt{3}$ ＝20	長軸 20 短軸	10	15

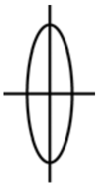
解析：(1) $4x^2+36y^2=36 \Rightarrow \dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{1}=1$，中心為（0，0）



$a=3$，$b=1$，$c=\sqrt{3^2-1^2}=2\sqrt{2}$

兩焦點間距離為 $2c=4\sqrt{2}$，正焦弦長為 $\dfrac{2b^2}{a}=\dfrac{2(1)^2}{3}=\dfrac{2}{3}$

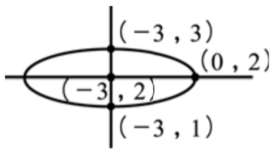
(2) $36x^2+4y^2=36 \Rightarrow \dfrac{x^2}{1}+\dfrac{y^2}{9}=1$，中心為（0，0）



$a=3$，$b=1$，$c=\sqrt{3^2-1^2}=2\sqrt{2}$

兩焦點間距離為 $2c=4\sqrt{2}$，正焦弦長為 $\dfrac{2b^2}{a}=\dfrac{2}{3}$

(3) $\dfrac{(x+3)^2}{9}+\dfrac{(y-2)^2}{1}=1$，中心為（－3，2）



$a=3$，$b=1$，$c=\sqrt{3^2-1^2}=2\sqrt{2}$

兩焦點間距離為 $2c=4\sqrt{2}$，正焦弦長為 $\dfrac{2b^2}{a}=\dfrac{2}{3}$

(4) F_1（0，0），F_2（6，8），心為 $\dfrac{F_1+F_2}{2}=\left(\dfrac{6+0}{2},\dfrac{8+0}{2}\right)=(3,4)$

$2a=20$，$\therefore 2c=\overline{F_1F_2}=\sqrt{6^2+8^2}=10$，$2b=\sqrt{(2a)^2-(2c)^2}=10\sqrt{3}$

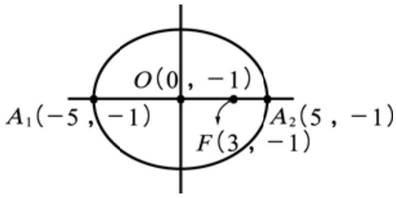
正焦弦長為 $\dfrac{2b^2}{a}=\dfrac{150}{10}=15$

04.一橢圓的頂點為（5，－1），（－5，－1），一焦點（3，－1），則橢圓方程式為【　　　　】。

答案：$\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{(y+1)^2}{16}=1$

解析：中心為（$\dfrac{5+(-5)}{2}$，$\dfrac{-1-1}{2}$）＝（0，－1），$a=5$，$c=3$，$b=\sqrt{5^2-3^2}=4$

∴橢圓方程式為 $\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{(y+1)^2}{16}=1$



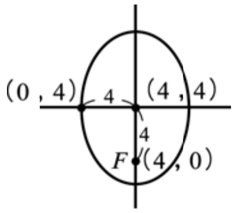
05.坐標平面上有一橢圓，已知其長軸平行 y 軸，短軸的一個頂點為（0，4），且其中一個焦點為（4，0），則此橢圓長軸長為【　　　　】。

答案：$8\sqrt{2}$

解析：∵長軸平行 y 軸，且焦點落在長軸上

∴長軸方程式可設為 $x=4$，又知短軸的頂點為（0，4），短軸方程式可設為 $y=4$

∴中心為（4，4）⇒ $b=4$，$c=4$，$a=4\sqrt{2}$，長軸長為 $2a=8\sqrt{2}$



06.一橢圓的長軸在 $x=5$ 上，短軸在 $y=1$ 上，短軸為長軸的 $\dfrac{3}{5}$ 倍，中心到焦點的距離為 12，求此橢圓方程式為【　　　　】。

答案：$\dfrac{(x-5)^2}{81}+\dfrac{(y-1)^2}{225}=1$

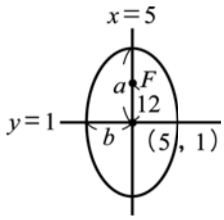
解析：長軸在 $x=5$，短軸在 $y=1$，橢圓為直立型

中心為（5，1），$c=12$，$b=\dfrac{3}{5}a$

利用 $a^2=b^2+c^2$ ⇒ $a^2=(\dfrac{3}{5}a)^2+12^2$

∴$\dfrac{16}{25}a^2=144$　∴$a^2=225$，$b^2=(\dfrac{3}{5}a)^2=81$，

∴橢圓之方程式為 $\dfrac{(x-5)^2}{81}+\dfrac{(y-1)^2}{225}=1$



07.設 P 為橢圓 $3x^2+16y^2=16$ 上的一點，其至直線 $3x+4y=12$ 有最短距離 d，此時 P 的坐標為【　　　　】，d＝【　　　　】。

答案：（2，$\dfrac{1}{2}$）；$\dfrac{4}{5}$

解析：利用橢圓的參數式，橢圓 $3x^2+16y^2=16$ 上的一點 P，可設為（$\dfrac{4}{\sqrt{3}}\cos\theta$，$\sin\theta$）

則 P 到 L：$3x+4y=12$ 的距離為

$$\frac{|4\sqrt{3}\cos\theta+4\sin\theta-12|}{5}=\frac{|8\sin(\theta+60^\circ)-12|}{5}\geq\frac{4}{5}$$

$\therefore$當 $\theta=30°$ 時，最短距離為 $d=\frac{4}{5}$，P 的坐標為（2，$\frac{1}{2}$）

08.設橢圓 $\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{1}=1$（$a>b>0$），則：

（1）橢圓之內接正方形的面積為【　　　　】，周長為【　　　　】。

（2）橢圓之內接矩形的周長最大值為【　　　　】，面積最大值為【　　　　】。

答案：（1）3；$4\sqrt{3}$；（2）8；$2\sqrt{3}$

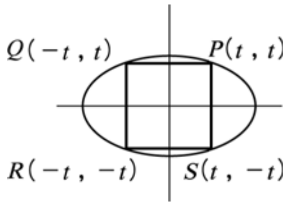
解析：（1）設橢圓內接正方形四個頂點為

（t，t），（$-t$，t），（$-t$，$-t$），（t，$-t$）

$\frac{t^2}{3}+\frac{t^2}{1}=1$

$\therefore t^2\left(\frac{3+1}{3\times1}\right)=1\Rightarrow t^2=\frac{3}{4}$，$\therefore$橢圓內接正方形面積為 $4t^2=4\times\frac{3}{4}=3$

橢圓內接正方形周長為 $8|t|=8\times\frac{\sqrt{3}}{2}=4\sqrt{3}$



（2）$\overline{PQ}=2\sqrt{3}\cos\theta$，$\overline{PS}=2\sin\theta$

周長為 $2(\overline{PQ}+\overline{PS})=2(2\sqrt{3}\cos\theta+2\sin\theta)$

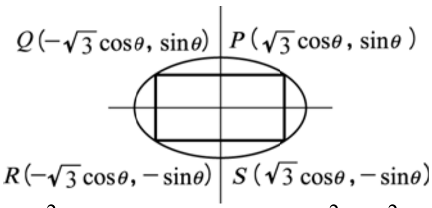
$=4(\sqrt{3}\cos\theta+\sin\theta)$

$=4\sqrt{3+1}\cdot\sin(\theta+\phi)\leq4\sqrt{3+1}=8$

當 $\sin(\theta+\phi)=1$ 時，周長有最大值 8

面積為 $\overline{PQ}\times\overline{PS}=2\sqrt{3}\cos\theta\cdot2\sin\theta=4\sqrt{3}\sin\theta\cos\theta=2\sqrt{3}\sin2\theta\leq2\sqrt{3}$

當 $\sin2\theta=1$，面積有最大值 $2\sqrt{3}$



09.若圓 C 與兩定圓 C_1：$(x+1)^2+y^2=1$，C_2：$(x-1)^2+y^2=49$ 相切，求圓 C 之圓心的軌跡方程式為【　　　　】。

答案：$\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{15}=1$ 或 $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{8}=1$

解析：設圓 C，C_1，C_2 之圓心分別是 P（x，y）

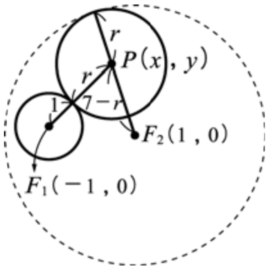
$F_1(-1，0)$，$F_2(1，0)$，圓 C 半徑為 r

（1）當圓 C 與 C_1 外切，但與 C_2 內切時，如下圖

$\overline{PF_1}=r+1$，$\overline{PF_2}=7-r$　$\therefore\overline{PF_1}+\overline{PF_2}=(r+1)+(7-r)=8=2a\Rightarrow a=4$

又 $\overline{F_1F_2}=2c=2$　$\therefore c=1$

$\therefore b^2=4^2-1^2=15$，$F_1$，$F_2$ 之中點為（0，0）$\Rightarrow$ P 的軌跡為橢圓方程式：$\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{15}=1$



（2）當圓 C 與 C_1 與 C_2 均內切時，如下圖

$\overline{PF_1}=r-1$，$\overline{PF_2}=7-r$

$\therefore \overline{PF_1}+\overline{PF_2}=(r-1)+(7-r)=6=2a \Rightarrow a=3$

又 $\overline{F_1F_2}=2c=2 \quad \therefore c=1$

$\therefore b^2=3^2-1^2=8$，F_1，F_2 之中點為（0，0）

$\Rightarrow$ P 的軌跡為橢圓方程式：$\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{8}=1$

$\therefore$軌跡方程式為 $\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{15}=1$ 或 $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{8}=1$