高中數學第四冊二下

第一章_圓錐曲線1-2_拋物線

01.頂點為（2，1），焦點為（2，－2）之拋物線方程式為【　　　　　】。

答案：$(x-2)^2=-12(y-1)$

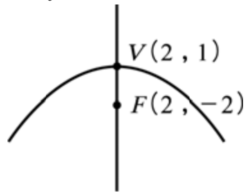
解析：設 V（2，1），F（2，－2），$\overline{VF}=|c|=3$

對稱軸為 $x-2=0$

如下圖，開口向下　∴$c=-3$

利用拋物線標準式 $(x-2)^2=4c(y-1)$

∴拋物線方程式為 $(x-2)^2=-12(y-1)$



02.設拋物線的焦點為 F（4，－2），準線為 L：$x=1$，試求：

（1）對稱軸方程式。

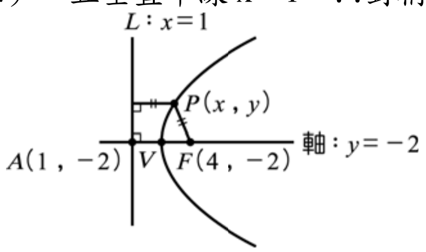
（2）正焦弦長。

（3）頂點坐標。

（4）頂點與正焦弦兩端點所成三角形面積。

（5）拋物線方程式。

答案：（1）對稱軸通過焦點 F（4，－2），且垂直準線 $x=1$，∴對稱軸方程式為 $y=-2$



（2）準線與軸的交點 A（1，－2）

又 $\overline{AF}=2|c|=|4-1|=3$，正焦弦長為 $4|c|=6$

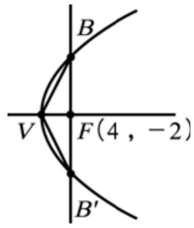
（3）頂點 V 為 A 與 F 之中點，∴$V\left(\frac{1+4}{2}，\frac{(-2)+(-2)}{2}\right)=\left(\frac{5}{2}，-2\right)$

（4）已知正焦弦長 $\overline{BB'}=6$

∴$\triangle VBB'=\frac{1}{2}\times\overline{BB'}\times\overline{VF}=\frac{1}{2}\times6\times\frac{3}{2}=\frac{9}{2}$

（5）此拋物線開口向右，頂點 $V\left(\frac{5}{2}，-2\right)$，$4c=6$

∴拋物線方程式為 $(y+2)^2=6\left(x-\frac{5}{2}\right)$



答：（1）$y=-2$；（2）6；（3）$\left(\frac{5}{2}，-2\right)$；（4）$\frac{9}{2}$；（5）$(y+2)^2=6\left(x-\frac{5}{2}\right)$

03.完成下列表格：

方程式	頂點	焦點	準線
$x^2=4y$			
$x^2=-8y$			
$y^2=12x$			
$y^2=-16x$			
$(y-3)^2=20(x+4)$			
$y^2+2x+2y-1=0$			
$x^2+4x+4y-4=0$			
$\sqrt{(x-1)^2+(y-1)^2}=\frac{\|x+y+3\|}{\sqrt{2}}$			

方程式	正焦弦長	對稱軸	開口方向
$x^2=4y$			
$x^2=-8y$			
$y^2=12x$			
$y^2=-16x$			
$(y-3)^2=20(x+4)$			
$y^2+2x+2y-1=0$			
$x^2+4x+4y-4=0$			
$\sqrt{(x-1)^2+(y-1)^2}=\frac{\|x+y+3\|}{\sqrt{2}}$			

解析：

方程式	頂點	焦點	準線
$x^2=4y$	$(0,0)$	$(0,1)$	$y=-1$
$x^2=-8y$	$(0,0)$	$(0,-2)$	$y=2$
$y^2=12x$	$(0,0)$	$(3,0)$	$x=-3$
$y^2=-16x$	$(0,0)$	$(-4,0)$	$x=4$
$(y-3)^2=20(x+4)$	$(-4,3)$	$(1,3)$	$x=-9$
$y^2+2x+2y-1=0$	$(1,-1)$	$(\frac{1}{2},-1)$	$x=\frac{3}{2}$
$x^2+4x+4y-4=0$	$(-2,2)$	$(-2,1)$	$y=3$
$\sqrt{(x-1)^2+(y-1)^2}=\frac{\lvert x+y+3\rvert}{\sqrt{2}}$	$(-\frac{1}{4},-\frac{1}{4})$	$(1,1)$	$x+y+3=0$

方程式	正焦弦長	對稱軸	開口方向
$x^2=4y$	4	$x=0$	向上
$x^2=-8y$	8	$x=0$	向下
$y^2=12x$	12	$y=0$	向右
$y^2=-16x$	16	$y=0$	向左
$(y-3)^2=20(x+4)$	20	$y-3=0$	向右
$y^2+2x+2y-1=0$	2	$y+1=0$	向左
$x^2+4x+4y-4=0$	4	$x+2=0$	向下
$\sqrt{(x-1)^2+(y-1)^2}=\frac{\lvert x+y+3\rvert}{\sqrt{2}}$	$5\sqrt{2}$	$x-y=0$	斜右上 45°

4. 設 $P(x,y)$ 是拋物線 Γ：$x^2-2x-4y+5=0$ 上任一點，試求 P 到直線 L：$3x+4y+12=0$ 的最短距離為【　　　】，此時 P 的坐標為【　　　】。

答案：$\frac{67}{20}$；$(-\frac{1}{2},\frac{25}{16})$

解析：Γ：$x^2-2x-4y+5=0 \Rightarrow \Gamma$：$(x-1)^2=4(y-1)$

又 $P(x,y)\in\Gamma$　$\therefore P(x,y)$ 的參數式為 $\begin{cases}x=1+2t\\ y=1+t^2\end{cases}$，$t\in R$

L：$3x+4y+12=0$

$$d(P,L)=\frac{\lvert 3(1+2t)+4(1+t^2)+12\rvert}{\sqrt{3^2+4^2}}=\frac{\lvert 4t^2+6t+19\rvert}{5}$$

$$=\frac{\left\lvert 4[t^2+\frac{3}{2}t+(\frac{3}{4})^2]-\frac{9}{4}+19\right\rvert}{5}=\frac{\left\lvert 4(t+\frac{3}{4})^2+\frac{67}{4}\right\rvert}{5}$$

當 $t=-\frac{3}{4}$ 時，P（x，y）＝（$-\frac{1}{2}$，$\frac{25}{16}$）

∴d（P，L）最短距離為 $\frac{67}{20}$

05.一拋物線的對稱軸垂直於 x 軸，並通過（0，1），（1，2），（3，−2）三點，求：

（1）拋物線方程式。

（2）焦點坐標。

（3）準線方程式。

答案：（1）已知拋物線的對稱軸垂直於 x 軸

其方程式可設為 $y=ax^2+bx+c$

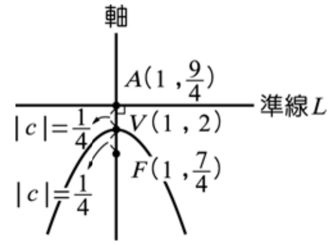
又過（0，1），（1，2），（3，−2）$\Rightarrow \begin{cases} 1=a\cdot 0+b\cdot 0+c \\ 2=a+b+c \\ -2=9a+3b+c \end{cases} \Rightarrow a=-1，b=2，c=1$

∴拋物線方程式為 $y=-x^2+2x+1$

（2）$\because y=-x^2+2x+1 \Rightarrow (x-1)^2=-(y-2)$

頂點（1，2），開口向下，$|c|=\frac{1}{4}$，∴F（1，$2-\frac{1}{4}$）＝（1，$\frac{7}{4}$）

（3）準線方程式為 L：$y=\frac{9}{4}$



答：（1）$y=-x^2+2x+1$；（2）（1，$\frac{7}{4}$）；（3）$y=\frac{9}{4}$

06.試求下列各拋物線的方程式：

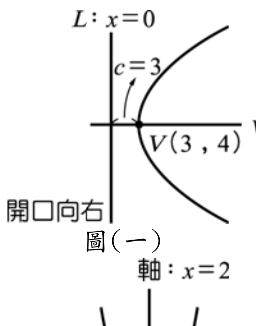
（1）頂點為（3，4），準線為 y 軸的拋物線。

（2）通過點（5，4），頂點為（1，2），對稱軸垂直於 y 軸的拋物線。

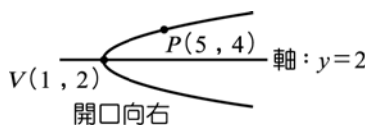
（3）通過點（1，2），（4，5）兩點，對稱軸是直線 x＝2 的拋物線。

（4）通過（−1，0），（−9，0）與（0，9）三點，對稱軸平行於 y 軸的拋物線。

答案：



圖(一)



圖(二)

圖(三)

（1）如圖(一)　∴拋物線方程式為 $(y-4)^2=12(x-3)$

（2）如圖(二)，設拋物線方程式為 $(y-2)^2=4c(x-1)$

將（5，4）代入（4－2）^{2}＝4c（5－1）　$\therefore c=\dfrac{1}{4}$

$\therefore$抛物線方程式為（y－2）^{2}＝x－1

（3）如圖(三)，設抛物線方程式為（x－2）^{2}＝4c（y－k）

將（1，2），（4，5）代入 $\Rightarrow \begin{cases}(-1)^2=4c\,(2-k)\\ 2^2=4c\,(5-k)\end{cases}$，$\therefore c=\dfrac{1}{4}$，k＝1

$\therefore$抛物線方程式為（x－2）^{2}＝y－1

（4）對稱軸平行於 y 軸，開口為上下型，可設為 $y=ax^2+bx+c$

將（－1，0），（－9，0），（0，9）代入$\Rightarrow \begin{cases}0=a-b+c\\ 0=81a-9b+c\\ 9=c\end{cases}$，a＝1，b＝10，c＝9

$\therefore$抛物線方程式為 $y=x^2+10x+9$

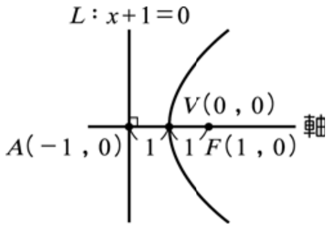
07.試求下列各抛物線的方程式：

（1）準線為直線 L：x＋1＝0，焦點為 F（1，0）的抛物線。

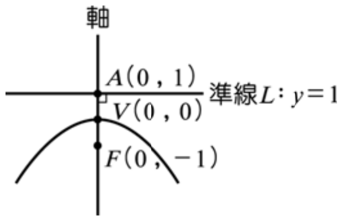
（2）準線為直線 L：y＝1，焦點為 F（0，－1）的抛物線。

（3）準線為直線 L：x＋y＝1，焦點為 F（1，1）的抛物線。

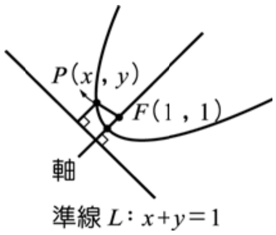
答案：



圖(一)



圖(二)



圖(三)

（1）如圖(一)，開口向右，4c＝4　$\therefore$抛物線方程式為 $y^2=4x$

（2）如圖(二)，開口向下，4c＝－4　$\therefore$抛物線方程式為 $x^2=-4y$

（3）如圖(三)，利用定義式 $\overline{PF}=d(P,L)$

$$\sqrt{(x-1)^2+(y-1)^2}=\frac{|x+y-1|}{\sqrt{2}}\Rightarrow (x-1)^2+(y-1)^2=\frac{(x+y-1)^2}{2}$$

$\therefore$抛物線方程式為 $x^2-2xy+y^2-2x-2y+3=0$

答：（1）$y^2=4x$；（2）$x^2=-4y$；（3）$x^2-2xy+y^2-2x-2y+3=0$

08.抛物線 $x^2=4y$ 上長度為 5 的焦弦兩端點為（x_1，y_1），（x_2，y_2），則 y_1+y_2＝【　　　　】。

答案：3

解析：$\because x^2=4y \Rightarrow |c|=1$

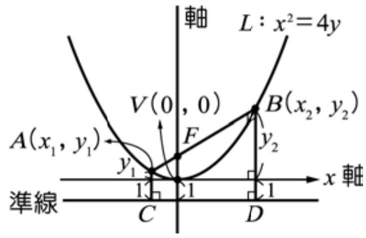
$\therefore \overline{AC}=y_1+1$，$\overline{BD}=y_2+1$

利用抛物線定義式

$\overline{AF}=\overline{AC}=y_1+1$

$\overline{BF}=\overline{BD}=y_2+1$

$\therefore \overline{AF}+\overline{BF}=y_1+1+y_2+1=5$，$\therefore y_1+y_2=3$



09.坐標平面上給定點 A（$\frac{9}{4}$，2），直線 L：y＝－5 與拋物線 Γ：x^2＝8y。以 d（P，L）表示點 P 到直線 L 的距離。若點 P 在 Γ上變動，則｜d（P，L）－$\overline{AP}$｜之最大值為【　　　　】。（化成最簡分數）

答案：$\frac{21}{4}$

解析：Γ：x^2＝8y，準線 M：y＝－2，焦點 F（0，2）

$\therefore$d（P，L）＝d（P，M）＋3＝$\overline{PF}$＋3（$\because$d（P，M）＝$\overline{PF}$拋物線定義）

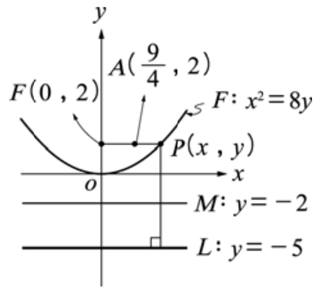
$\therefore$max｛｜d（P，L）－$\overline{AP}$｜｝

＝max｛｜$\overline{PF}$＋3－$\overline{AP}$｜｝

＝max｛｜$\overline{PF}$－$\overline{AP}$＋3｜｝

＝$\overline{AF}$＋3

即 F，A，P 共線時　｜d（P，L）－$\overline{AP}$｜有最大值為$\frac{9}{4}+3=\frac{21}{4}$



10.求直線 L：x－y＋3＝0 被拋物線 y＝x^2 所截出的線段長為【　　　　】。

答案：$\sqrt{26}$

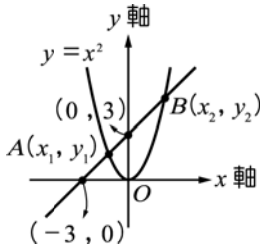
解析：設 L 與拋物線的交點為 A（x_1，y_1），B（x_2，y_2）

即 $\begin{cases} L：x-y+3=0 \\ \Gamma：y=x^2 \end{cases} \Rightarrow x+3=x^2 \Rightarrow x^2-x-3=0$

$\because x_1$，x_2 為兩根

$\therefore \begin{cases} x_1+x_2=1 \\ x_1x_2=-3 \end{cases}$ 且 $y_1-y_2=x_1^2-x_2^2=(x_1+x_2)(x_1-x_2)=x_1-x_2$

$\therefore \overline{AB}=\sqrt{(x_1-x^2)^2+(y_1-y_2)^2}=\sqrt{2(x_1-x^2)^2}=\sqrt{2[(x_1+x_2)^2-4x_1x_2]}=\sqrt{2(1^2+12)}=\sqrt{26}$



11.已知直線 L：x＋2＝0，圓 C：$x^2+y^2-6x-4y+12=0$，求與 L 相切且與 C 外切之切圓圓心軌跡方程式為【　　　　】。

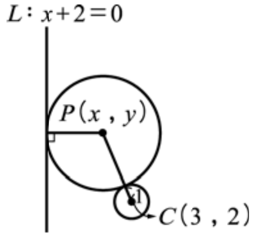
答案：$(y-2)^2=12x$

解析：C：$(x-3)^2+(y-2)^2=1$

$\overline{PC}$＝d（P，L）＋1

$\sqrt{(x-3)^2+(y-2)^2}=(x+2)+1 \Rightarrow (x-3)^2+(y-2)^2=(x+3)^2$

∴軌跡方程式為 $(y-2)^2=12x$



12. 坐標平面上有一以點 V（0，1）為頂點，F（0，2）為焦點的拋物線。設 P（a，b）為此拋物線上一點，Q（a，0）為 P 在 x 軸上的投影，滿足∠FPQ＝60°，則 b＝【　　　　】。

答案：4

解析：∵V（0，1）為頂點，F（0，2）為焦點 ⇒ x 軸是準線

又 P（a，b）在此拋物線上　　∴ $\overline{PF}=\overline{PQ}$

且∠FPQ＝60° ⇒ △PFQ 是正三角形

過 F 作 $\overline{PQ}$ 的垂直線交 $\overline{PQ}$ 於 M，則 b＝$\overline{PQ}=2\overline{MQ}=2\times2=4$