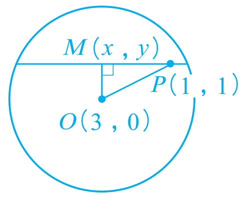
【直徑式的應用】

1. 圓 $C：x^2+y^2-6x-7=0$，點 $P\,(1，1)$ 在圓內，求過 P 之所有弦的中點所形成圖形的方程式為________。

■：$C：(x-3)^2+y^2=16$，圓心 $O\,(3，0)$



若弦中點為 $M\,(x，y)$

則 $\overrightarrow{OM}\perp\overrightarrow{PM}$，以 $\overline{OP}$ 為直徑，利用直徑式

⇨ $(x-3，y)\cdot(x-1，y-1)=0$，

即 $x^2+y^2-4x-y+3=0$

2. $A\,(1，2)$，$B\,(4，1)$，$C\,(5，-2)$ 三點落在圓 C 上或內部，求最小圓 C 的方程式為________。

■：$\overline{AB}=\sqrt{(1-4)^2+(2-1)^2}=\sqrt{10}$

$\overline{AC}=\sqrt{(1-5)^2+(2+2)^2}=\sqrt{32}$

$\overline{BC}=\sqrt{(4-5)^2+(1+2)^2}=\sqrt{10}$

$\because \overline{AC}^2>\overline{AB}^2+\overline{BC}^2$　$\therefore \triangle ABC$ 為鈍角三角形

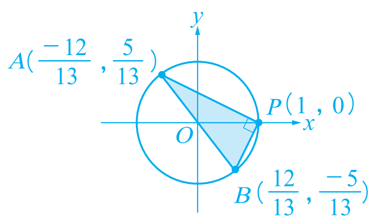
所求為以 $\overline{AC}$ 為直徑的圓⇨ $(x-1)(x-5)+(y-2)(y+2)=0$

$\therefore$最小圓 C 的方程式為 $x^2+y^2-6x+1=0$

【直徑式的應用】

3. 設 P, A, B 為坐標平面上以原點為圓心的單位圓上三點，其中 P 點坐標為 $(1，0)$，A 點坐標為 $\left(\dfrac{-12}{13}，\dfrac{5}{13}\right)$，且 $\angle APB$ 為直角，則 B 點坐標為________。（化成最簡分數）〔96. 學測〕

■：由 $\angle APB=90$ 知 $\overline{AB}$ 為直徑，



$\overline{AB}$ 中點為圓心 $(0，0)$，

因此 $B=-A=\left(\dfrac{12}{13}，\dfrac{-5}{13}\right)$

4. 設△ABC 的三頂點坐標分別為 $A(-2,7,15)$，$B(1,16,3)$，$C(10,7,3)$，試求：

(1) 通過 A，B，C 三點的平面方程式為________。

(2) △ABC 的外心坐標為________。 〔96. 指考甲〕

■：(1) $\overrightarrow{AB}=(3,9,-12)$，$\overrightarrow{AC}=(12,0,-12)$

⇨ 外積 $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=(-108,-108,-108)$

取與外積 $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}$ 平行的向量 $\vec{n}=(1,1,1)$ 作爲平面法向量，所以通過 A，B，C 三點的平面方程式爲 $x+y+z=20$

(2) $A(-2,7,15)$，$B(1,16,3)$

⇨ 線段 AB 的垂直平分面爲 $x+3y-4z+2=0$

$A(-2,7,15)$，$C(10,7,3)$

⇨ 線段 AC 的垂直平分面爲 $x-z+5=0$

此兩垂直平分面與平面 ABC 交於一點，此交點即爲△ABC 的外心

$$\Rightarrow \begin{cases} x+y+z=20 \\ x+3y-4z+2=0 \\ x-z+5=0 \end{cases} \Rightarrow (x,y,z)=(3,9,8)$$

【圓的參數式】

5. 設 (a,b) 為二次曲線 $x^2+y^2-6x-2y+9=0$ 上的點，則 a^2+b^2-2b 的最大值為________。

■：已知圓 C：$x^2+y^2-6x-2y+9=0$ 可化爲 $(x-3)^2+(y-1)^2=1$，

圓心爲 $O(3,1)$，半徑爲 1

$a=3+\cos\theta$，$b=1+\sin\theta$ 代入 a^2+b^2-2b 得

$(9+6\cos\theta+\cos^2\theta)+(1+2\sin\theta+\sin^2\theta)-2(1+\sin\theta)=9+6\cos\theta$

$\because -1\leq\cos\theta\leq 1$，即 $3\leq x^2+y^2-2y\leq 15$，故 a^2+b^2-2b 之最大值爲 15

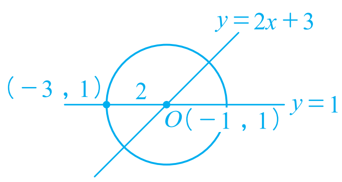
6. 一圓對稱於 $y=1$ 及 $y=2x+3$，且過 $(-3,1)$，則其方程式為________。

■：

圓心在對稱軸上，解 $\begin{cases} y=1 \\ y=2x+3 \end{cases}$ 得圓心 $(-1,1)$

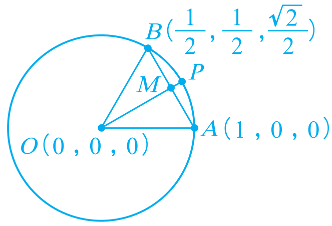
又半徑爲 $\sqrt{(-1+3)^2+(1-1)^2}=2$

$\therefore$ 圓方程式爲 $(x+1)^2+(y-1)^2=4$



7. 某單位球，其球心坐標為（0，0，0），球上有 A（1，0，0），B（$\frac{1}{2}$，$\frac{1}{2}$，$\frac{\sqrt{2}}{2}$），設劣弧 $\overparen{AB}$ 上之中點為 P，試求 P 點坐標________。

■：設 M 爲 $\overline{AB}$ 之中點，P 爲 $\overparen{AB}$ 之中點



$$M=\frac{A+B}{2}=\left(\frac{1+\frac{1}{2}}{2},\frac{0+\frac{1}{2}}{2},\frac{0+\frac{\sqrt{2}}{2}}{2}\right)$$

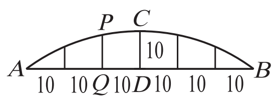
$$=\left(\frac{3}{4},\frac{1}{4},\frac{\sqrt{2}}{4}\right)$$

又 $\overrightarrow{OP}\,//\,\overrightarrow{OM}$，令 $\overrightarrow{OP}=t\overrightarrow{OM}$ $\quad\therefore P$ 坐標 $\left(\frac{3}{4}t,\frac{t}{4},\frac{\sqrt{2}}{4}t\right)$

$\because P$ 在 S：$x^2+y^2+z^2=1$ 上⇨ $\left(\frac{3}{4}t\right)^2+\left(\frac{1}{4}t\right)^2+\left(\frac{\sqrt{2}}{4}t\right)^2=1$

⇨ $t=\frac{2}{\sqrt{3}}$ $\quad\therefore P\left(\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{\sqrt{3}}{6},\frac{\sqrt{6}}{6}\right)$

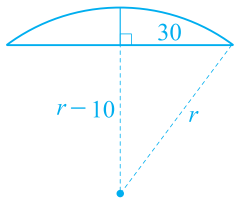
8. 一圓弧形拱橋（如右圖）共有五根垂直支柱，已知圓弧端點及相鄰支柱間距離都是 10 公尺，又正中央支柱 $\overline{CD}=10$ 公尺，則：



(1) $\overparen{AB}$ 所在圓之半徑為________公尺。

(2) $\overline{CD}$ 左方相鄰支柱 $\overline{PQ}$ 長為________公尺。

■：(1) 由 $30^2+(r-10)^2=r^2$ 得 $r=50$（公尺）



(2) 定坐標，使 D（0，0），圓心（0，−40）

圓方程式：$x^2+(y+40)^2=50^2$

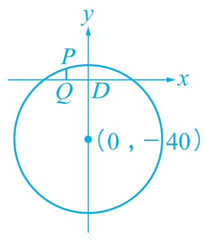
將 P（−10，y）代入得

$100+(y+40)^2=2500$

⇨ $y=-40\pm20\sqrt{6}$（負不合）

取 $y=-40+20\sqrt{6}$

即 $\overline{PQ}=20\sqrt{6}-40$（公尺）



【過圓外一點求切線】

9. 將一光源置於點 $P(1, 4)$，則圓 $(x-2)^2+(y-1)^2=1$ 在 x 軸上的影子長為 ________ .

■：設切線 $L: y-4=m(x-1)$

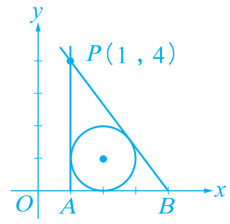
即 $mx-y-m+4=0$

圓心 $(2, 1)$，半徑 1

因此 $\dfrac{|2m-1-m+4|}{\sqrt{m^2+1}}=1$，解得 $m=-\dfrac{4}{3}$

另一切線爲鉛直線 $x=1$，x 軸交於 $A(1, 0)$

$y-4=-\dfrac{4}{3}(x-1)$ 與 x 軸交於 $B(4, 0)$　　故影子長 $\overline{AB}=3$



10. 在坐標平面上，一個圓通過點 $(-2, 7)$，且與直線 $4x+3y-14=0$ 相切於點 $(-1, 6)$，若此圓的方程式為 $x^2+y^2+ax+by+c=0$，則 $a=$ ________ ，$b=$ ________ ，$c=$ ________ .　〔96. 指考甲〕

■：設 $A(-2, 7)$，$P(-1, 6)$，$\overrightarrow{PO} \,/\!/\, \vec{n}$（$L$ 之法向量），圓心 $O(-1+4t, 6+3t)$

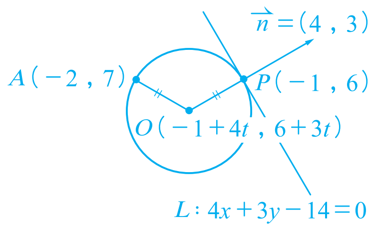
又 $\overline{OA}^2=\overline{OP}^2$，則 $[(-1+4t)+2]^2+[(6+3t)-7]^2=|t(4, 3)|^2$

⇨ $(4t+1)^2+(3t-1)^2=25t^2$ ⇨ 解得 $t=-1$

⇨ 圓心坐標爲 $(-5, 3)$，$r=5$

所以此圓的方程式爲 $(x+5)^2+(y-3)^2=25$

⇨ $x^2+y^2+10x-6y+9=0$，故 $a=10$，$b=-6$，$c=9$



11. 過 P（4，-9）作圓 C：$x^2+y^2+2x-6y-15=0$ 之二切線，切點為 A，B，則：

(1) 求△PAB 之外接圓方程式為________。

(2) 若 Q，R 為圓 C 上相異兩點，且 P，Q，R 三點共線，則 $\overline{PQ}\times\overline{PR}=$________。

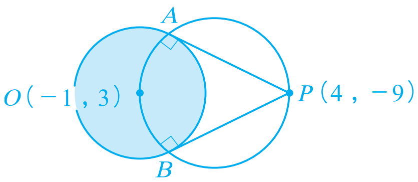
■：C：$(x+1)^2+(y-3)^2=25$，圓心 O（-1，3），半徑 $r=5$

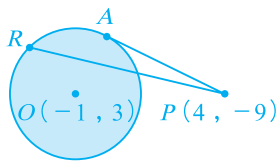
(1) △PAB 之外接圓即爲以 $\overline{OP}$ 爲直徑的圓，其方程式爲

$(x-4)(x+1)+(y+9)(y-3)=0$，即 $x^2+y^2-3x+6y-31=0$

(2) 點 P 到圓 C 的切線段長爲 $\sqrt{\overline{OP}^2-r^2}=12$，

由切割性質：則 $\overline{PQ}\times\overline{PR}=12^2=144$





12. 過 A（3，4，0）及 B（-2，3，6）兩點，球心在 z 軸之球面方程式為________。

■：設球心 Q（0，0，c），A（3，4，0），B（-2，3，6）

利用 $\overline{QA}^2=\overline{QB}^2$，則 $3^2+4^2+c^2=(-2)^2+3^2+(c-6)^2$ ⇨ $c=2$

球心 Q（0，0，2），半徑爲 $\sqrt{3^2+4^2+2^2}=\sqrt{29}$

球面方程式爲 $x^2+y^2+(z-2)^2=29$

13. 在平面 $z=0$ 上有一圓，其圓心為（0，0，0），半徑為 1，今有一球，其球面含此圓及點（0，0，2），求此球的半徑為________。

■：設球心爲 Q，截圓的圓心爲 O（0，0，0）

平面 $z=0$ 之法向量 $\vec{n}=$（0，0，1）

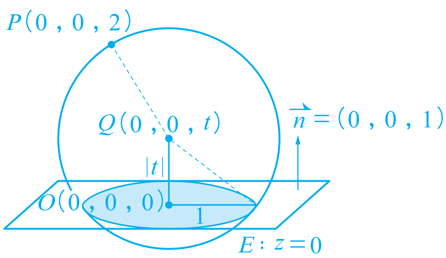
$\because \overrightarrow{OQ} \,/\!/\, \vec{n}$，

令 Q 的坐標爲（0，0，t）

$\therefore \overline{QP}^2=t^2+1^2$

⇨ $(0-0)^2+(0-0)^2+(t-2)^2=t^2+1$

⇨ $t=\dfrac{3}{4}$ ⇨ 球半徑爲 $\overline{QP}=\sqrt{(\dfrac{3}{4})^2+1^2}=\dfrac{5}{4}$



14. x，y，$z\in\mathbb{R}$，且 $x+y+z=7$，則 S：$x^2+y^2+z^2-4x+2y-6z+14$ 在（x，y，z）＝________時，有最小值為________．

■：〔代數觀點〕

利用柯西不等式，令 S：$x^2+y^2+z^2-4x+2y-6z+14=k$

⇨ $(x-2)^2+(y+1)^2+(z-3)^2=k$

設 $|\vec{u}|^2=(x-2)^2+(y+1)^2+(z-3)^2$

⇨ $\vec{u}=(x-2,y+1,z-3)$，$\vec{v}=(1,1,1)$

⇨ $\vec{u}\cdot\vec{v}=x-2+y+1+z-3=x+y+z-4=7-4=3$

⇨ $|\vec{u}|^2\cdot|\vec{v}|^2\geq(\vec{u}\cdot\vec{v})^2$

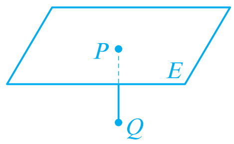
⇨ $k\cdot 3\geq 3^2$

⇨ $k\geq 3$，當等號成立時，$\dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y+1}{1}=\dfrac{z-3}{1}=t$ 代入 $x+y+z=7$

⇨ $t=1$　∴（x，y，z）＝（3，0，4）

〔幾何觀點〕

令點 Q（2，-1，3），平面 E：$x+y+z-7=0$，



S：$(x-2)^2+(y+1)^2+(z-3)^2=k$，

$P\in E$ ⇨ $\overline{PQ}=\sqrt{k}\geq d(Q,E)$

⇨ $\sqrt{k}\geq\dfrac{|2-1+3-7|}{\sqrt{3}}=\sqrt{3}$

∴$k\geq 3$，當 $\overline{PQ}\perp E$ 時，k 有最小值 3

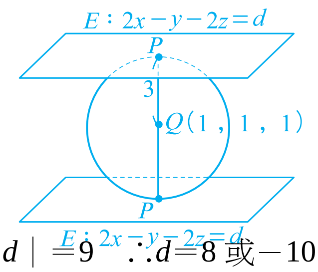
此時 P 爲（$2+t$，$-1+t$，$3+t$），代入 E：$x+y+z=7$

⇨ $t=1$　∴P 坐標（3，0，4）　⇨（x，y，z）＝（3，0，4）

15. 若 $(x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2=9$，則 $2x-y-2z$ 之最小值爲________．

■：

設 E：$2x-y-2z=d$，



S：$(x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2=9$

令 P（x，y，z）$\in E\cap S$

∴E：$2x-y-2z=d$

最大值與最小值發生在 E 與 S 相切時

∴$d(Q,E)=\dfrac{|2-1-2-d|}{\sqrt{2^2+(-1)^2+(-2)^2}}=3$ ⇨ $|1+d|=9$　∴$d=8$ 或 -10

∴其最小值為 -10

16. 空間中四點 O（0，0，0），A（3，0，0），B（0，6，0），C（0，0，9），試

求：(1) 四面體 $O-ABC$ 的內切球方程式為________。

(2) 過 A，B，C 三點的平面與該內切球的切點坐標為________。

■：(1) 設 E_1 爲平面 OAB：$z=0$，E_2 爲平面 OAC：$y=0$，E_3 爲平面 OBC：$x=0$，

E_4 爲平面 ABC：$\frac{x}{3}+\frac{y}{6}+\frac{z}{9}=1$，即 $6x+3y+2z-18=0$，球半徑 r

$\because d(Q, E_1)=d(Q, E_2)=d(Q, E_3)=d(Q, E_4)=r$，

即 $|r|=\frac{|6r+3r+2r-18|}{\sqrt{6^2+3^2+2^2}}$

又該四面體在第一卦限，因而令內切球 $Q(r, r, r)=(a, b, c)$

因此 a，b，c 均爲正

故 $a=b=c=\frac{|6a+3b+2c-18|}{7}$ ⇨ $7a=|11a-18|$

⇨ $7a=11a-18$ 或 $7a=-11a+18$，解出 $a=\frac{9}{2}$ 或 1

因 $\frac{9}{2}>3$，球心跑到四面體外面，所以 $a=1$，球心 $Q(1, 1, 1)$，

球半徑 $r=1$，內切球方程式爲 $(x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2=1$

(2) 設切點 P 坐標 (x_0, y_0, z_0)，由球心與切點連線垂直該平面

$\overrightarrow{QP}=(x_0-1, y_0-1, z_0-1)=t(6, 3, 2)$

因此 $x_0=1+6t$，$y_0=1+3t$，$z_0=1+2t$

又 P 在平面 ABC 上，故 $6(1+6t)+3(1+3t)+2(1+2t)-18=0$

解得 $t=\frac{1}{7}$，所以切點坐標 $\left(1+\frac{6}{7}, 1+\frac{3}{7}, 1+\frac{2}{7}\right)=\left(\frac{13}{7}, \frac{10}{7}, \frac{9}{7}\right)$