第2章 綜合練習

1. 在空間中，下列哪些點可與 A（1，2，3），B（2，5，3），C（2，6，4）三點構成一平行四邊形？ (A)（-1，-5，-2） (B)（1，1，2） (C)（1，3，4） (D)（3，7，6） (E)（3，9，4）．

解：設 D（x，y，z），利用平行四邊形對角線互相平分原理

(1) 平行四邊形 $ABCD$：（$1+2$，$2+6$，$3+4$）＝（$2+x$，$5+y$，$3+z$）

⇨（x，y，z）＝（1，3，4）

(2) 平行四邊形 $ABDC$：（$2+2$，$5+6$，$3+4$）＝（$1+x$，$2+y$，$3+z$）

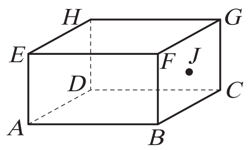
⇨（x，y，z）＝（3，9，4）

(3) 平行四邊形 $ADBC$：（$1+2$，$2+5$，$3+3$）＝（$2+x$，$6+y$，$4+z$）

⇨（x，y，z）＝（1，1，2）

故選(B)(C)(E)

2. 如右圖，$ABCD-EFGH$ 為一平行六面體，J 為四邊形 $BCGF$ 的中心，如果 $\overrightarrow{AJ}=a\overrightarrow{AB}+b\overrightarrow{AD}+c\overrightarrow{AE}$，試問下列哪些選項是正確的？ (A) $\frac{1}{3}<b<\frac{2}{3}$ (B) $a+b+c=2$ (C) $a=1$ (D) $a=2c$ (E) $a=b$．

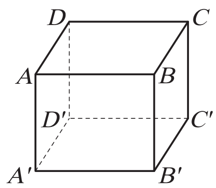


解：$\overrightarrow{AJ}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AG}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}（\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AE}）=\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AE}$

⇨ $a=1$，$b=\frac{1}{2}$，$c=\frac{1}{2}$

故選(A)(B)(C)(D)

3. $ABCD-A'B'C'D'$ 爲立方體的八個頂點，試問下列哪些線段會與線段 $A'B$ 共平面？ (A) $\overline{BC'}$ (B) $\overline{AC}$ (C) $\overline{DB'}$ (D) $\overline{DD'}$ (E) $\overline{CD'}$．



解：(A) A'，B，C' 三點決定唯一平面，故 A'，B，C' 共平面

(B) A'，B，A 所在的平面爲 $AA'B'B$，與 C 不共平面

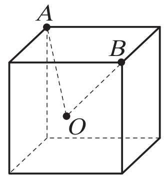
(C) A'，B，D 所在的平面不含 B'

(D) A'，B，D 所在的平面不含 D'

(E) A'，B，C 所在的平面即是 $A'BCD'$，所以 $\overline{A'B}$ 與 $\overline{CD'}$ 共平面

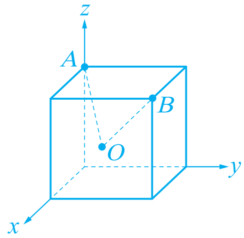
故選(A)(E)

4. 如右圖，設一正立方體的中心為 O，而 A，B 為此正立方體同一面上的兩個對頂點，則 $\cos\angle AOB=$ ________ 。



解：設此正立方體邊長爲 2，建立一個空間坐標系

如右下圖，



得 $O(1,1,1)$，$A(0,0,2)$，$B(2,2,2)$

$\overline{AO}=\sqrt{1+1+1}=\sqrt{3}$

$\overline{BO}=\sqrt{1+1+1}=\sqrt{3}$

$\overline{AB}=\sqrt{4+4}=\sqrt{8}$

由餘弦定律得 $\cos\angle AOB=\dfrac{3+3-8}{2\cdot\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}}=-\dfrac{1}{3}$

5. 坐標空間中，在 xy 平面上置有三個半徑爲 1 的球兩兩相切，設其球心分別爲 A，B，C。今將第四個半徑爲 1 的球置於這三個球的上方，且與這三個球都相切，並保持穩定。設第四個球的球心爲 P，試問下列哪些選項是正確的？

(A) 點 A，B，C 所在的平面和 xy 平面平行

(B) 三角形 ABC 是一個正三角形

(C) 三角形 PAB 有一邊長為 $\sqrt{2}$

(D) 點 P 到直線 AB 的距離為 $\sqrt{3}$

(E) 點 P 到 xy 平面的距離為 $1+\sqrt{3}$ 。 【96. 學測】

解：(A) 三個球皆在 $z=0$ 上方，球半徑皆爲 1，

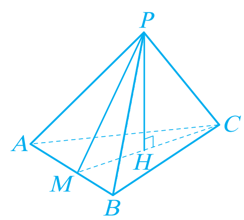
因此 A，B，C 皆在 $z=1$ 平面上，與 $z=0$ 平行

(B) 由 $\overline{AB}=\overline{AC}=\overline{BC}=2$ 知 $\triangle ABC$ 爲正三角形

(C) 三球兩兩外切，因此 $\overline{PA}=\overline{PB}=\overline{AB}=2$

(D) $\triangle PAB$ 爲邊長 2 的正三角形，∴邊上的高爲 $\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cdot 2=\sqrt{3}$

(E) 如右圖



$\overline{PM}=\overline{CM}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cdot 2=\sqrt{3}$

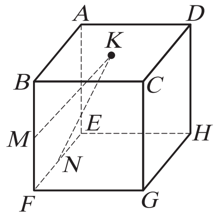
$\overline{MH}=\dfrac{1}{3}\overline{CM}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

$\Rightarrow \overline{PH}=\sqrt{\overline{PM}^2-\overline{MH}^2}=\sqrt{3-\dfrac{3}{9}}=\dfrac{2\sqrt{6}}{3}$

所求爲 $1+\dfrac{2\sqrt{6}}{3}$

故選(A)(B)(D)

6. 如右圖，正立方體 $ABCD\text{-}EFGH$ 的稜長等於 2（即 $\overline{AB}=2$），K 為正方形 $ABCD$ 的中心，M，N 分別為線段 BF，EF 的中點。試問下列哪些選項是正確的？



(A) $\overrightarrow{KM}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}-\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AE}$

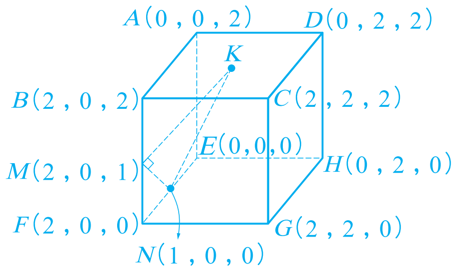
(B) $\overrightarrow{KM}\cdot\overrightarrow{AB}=1$（內積）

(C) $\overline{KM}=3$

(D) $\triangle KMN$ 為一直角三角形

(E) $\triangle KMN$ 之面積為 $\frac{\sqrt{10}}{2}$ 【98. 學測】

x：將右圖中正立方體 $ABCD\text{-}EFGH$ 坐標化



其中 $\overrightarrow{KM}=(2,0,1)-(1,1,2)$

$=(1,-1,-1)$

$\overrightarrow{AB}=(2,0,2)-(0,0,2)$

$=(2,0,0)$

$\overrightarrow{AD}=(0,2,2)-(0,0,2)$

$=(0,2,0)$

$\overrightarrow{AE}=(0,0,0)-(0,0,2)=(0,0,-2)$

(A) $\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}-\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AE}$

$=\frac{1}{2}(2,0,0)-\frac{1}{2}(0,2,0)+\frac{1}{2}(0,0,-2)=(1,-1,-1)=\overrightarrow{KM}$

(B) $\overrightarrow{KM}\cdot\overrightarrow{AB}=(1,-1,-1)\cdot(2,0,0)=2\neq 1$

(C) $\overline{KM}=\sqrt{(1)^2+(-1)^2+(-1)^2}=\sqrt{3}$

(D) $\overrightarrow{KM}=(1,-1,-1)$，$\overrightarrow{MN}=(1,0,0)-(2,0,1)=(-1,0,-1)$

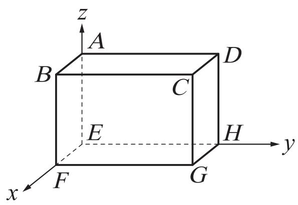
$\overrightarrow{KM}\cdot\overrightarrow{MN}=0$! $\overrightarrow{KM}\perp\overrightarrow{MN}$ $\quad\therefore\triangle KMN$ 爲直角三角形

(E) $\overline{KM}=\sqrt{3}$，$\overline{MN}=\sqrt{2}$

⇨ $\triangle KMN$ 之面積爲 $\frac{1}{2}\overline{KM}\times\overline{MN}=\frac{\sqrt{3}\cdot\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{6}}{2}\neq\frac{\sqrt{10}}{2}$

故選(A)(D)

7. 右圖之長方體，分別以直線 EF，EH，EA 為 x 軸，y 軸，z 軸，若 $\overline{EF}=1$，$\overline{EH}=3$，$\overline{EA}=2$，下列選項何者正確？



(A) 直線 AG 的對稱式為 $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-3}{3}=\dfrac{z-2}{-2}$

(B) 平面 BDG 的方程式為 $6x+2y+3z=12$

(C) B 點到平面 ACH 的距離為 $\dfrac{6}{7}$

(D) $\triangle DEG$ 的面積為 $\dfrac{5}{2}$

(E) 四面體 $E-ACF$ 的體積為 1．

解：定坐標爲 $E(0,0,0)$，$A(0,0,2)$，$B(1,0,2)$，$C(1,3,2)$，$D(0,3,2)$，$F(1,0,0)$，$G(1,3,0)$，$H(0,3,0)$

(A) $\overrightarrow{AG}=(1,3,-2)$，因此 $\overleftrightarrow{AG}$：$\dfrac{x}{1}=\dfrac{y}{3}=\dfrac{z-2}{-2}$

點 $(1,3,2)$ 不在 $\overleftrightarrow{AG}$ 上，故 $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-3}{3}=\dfrac{z-2}{-2}$ 不是 $\overleftrightarrow{AG}$

(B) $\overrightarrow{BD}=(-1,3,0)$，$\overrightarrow{BG}=(0,3,-2)$，

$\overrightarrow{BD}\times\overrightarrow{BG}=(-6,-2,-3)\ /\!/\ (6,2,3)$

取平面 BDG 法向量 $\vec{n}=(6,2,3)$，又過 $B(1,0,2)$

則平面 BDG 方程式爲 $6(x-1)+2(y-0)+3(z-2)=0$

$\Rightarrow 6x+2y+3z=12$

(C) $\overrightarrow{AC}=(1,3,0)$，$\overrightarrow{AH}=(0,3,-2)$，

$\overrightarrow{AC}\times\overrightarrow{AH}=(-6,2,3)\ /\!/\ (6,-2,-3)$

取法向量 $\vec{n}=(6,-2,-3)$，又過 $A(0,0,2)$

則平面 ACH 方程式爲 $6(x-0)-2(y-0)-3(z-2)=0$

即 $6x-2y-3z+6=0$

$$d(B,ACH)=\frac{|6-0-6+6|}{\sqrt{6^2+2^2+3^2}}=\frac{6}{7}$$

(D) $\overrightarrow{ED}=(0,3,2)$，$\overrightarrow{EG}=(1,3,0)$

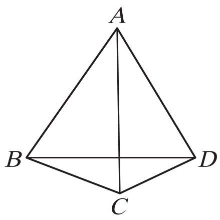
$$\triangle DEG\text{ 面積}=\frac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{ED}|^2|\overrightarrow{EG}|^2-(\overrightarrow{ED}\cdot\overrightarrow{EG})^2}=\frac{1}{2}\sqrt{13\cdot 10-9^2}=\frac{7}{2}$$

(E) 以 $\triangle AEF$ 爲底面，因 $\overline{CB}$ 與 AEF 平面垂直，所以高爲 $\overline{CB}=3$

故 $E-ACF$ 體積爲 $\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{2\cdot 1}{2}\cdot 3=1$

故選(B)(C)(E)

8. 正四面體 $ABCD$，M，N 分別為 $\overline{AB}$，$\overline{CD}$ 之中點，E 在 $\overline{BC}$ 上且 $\overline{BE}:\overline{EC}=2:1$，若 $\overline{AB}$ 之長為 $\sqrt{2}$，試求下列各式：



(1) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=$________。 (2) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AN}=$________。

(3) $\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{AD}=$________。 (4) $\overrightarrow{AN}\cdot\overrightarrow{BD}=$________。

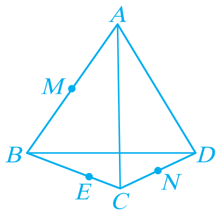
(5) $\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{AN}=$________。

解：(1) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}\cdot\cos 60°=1$

(2) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AN}=\overrightarrow{AB}\cdot\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}\right)=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1$

(3) $\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{AD}=\frac{2\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AB}}{3}\cdot\overrightarrow{AD}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AD}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}=\frac{2}{3}+\frac{1}{3}=1$

(4) $\overrightarrow{AN}\cdot\overrightarrow{BD}=\left(\frac{\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}}{2}\right)\cdot\left(\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB}\right)$



$=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AD}+|\overrightarrow{AD}|^2-\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AB}\right)$

$=\frac{1}{2}(1+2-1-1)=\frac{1}{2}$

(5) $\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{AN}=\left(\frac{2\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AB}}{3}\right)\cdot\left(\frac{\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}}{2}\right)$

$=\frac{1}{6}\left(2|\overrightarrow{AC}|^2+\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}+2\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}\right)$

$=\frac{1}{6}(2\cdot 2+1+2\cdot 1+1)=\frac{4}{3}$

9. $\triangle ABC$ 中，$A(1,1,1)$，$B(2,-1,1)$，$C(1,3,-1)$，垂心 H，試求垂心 H 之坐標為________。

解：令 $\overrightarrow{AH}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AC}$

$\overrightarrow{AB}=(1,-2,0)$，$\overrightarrow{AC}=(0,2,-2)$

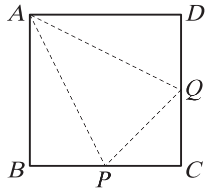
$\begin{cases}\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AH}=x|\overrightarrow{AB}|^2+y\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}\\ \overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AH}=x\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB}+y|\overrightarrow{AC}|^2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=x|\overrightarrow{AB}|^2+y\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}\\ \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=x\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}+y|\overrightarrow{AC}|^2\end{cases}$

$\Rightarrow\begin{cases}-4=5x-4y\\ -4=-4x+8y\end{cases}\Rightarrow 6x=-12\Rightarrow x=-2,\ y=-\frac{3}{2}$

$\overrightarrow{AH}=-2(1,-2,0)+\left(-\frac{3}{2}\right)\cdot(0,2,-2)=(-2,1,3)$

故 $H(-1,2,4)$

10. 如右圖，正方形 $ABCD$ 之邊長為 10 且 P，Q 各為 $\overline{BC}$，$\overline{CD}$ 之中點，將此正方形沿虛線向上摺起，使 B，C，D 三點重合，此重合點為 R，則 R 到平面 APQ 之距離為________。

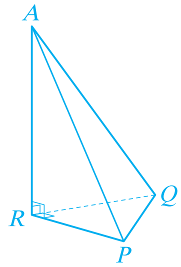


解：$\because \overline{PR}\perp\overline{RQ}$，$\overline{AR}\perp\overline{RQ}$，$\overline{AR}\perp\overline{PR}$，$\overline{QP}=5=\overline{QR}$，$\overline{AR}=10$

建立坐標系 $R(0,0,0)$，$P(5,0,0)$，$Q(0,5,0)$，$A(0,0,10)$

平面 APQ 爲 $\dfrac{x}{5}+\dfrac{y}{5}+\dfrac{z}{10}=1 \Rightarrow 2x+2y+z=10$

$\therefore R(0,0,0)$ 到平面 APQ 之距離爲 $d=\dfrac{10}{\sqrt{4+4+1}}=\dfrac{10}{3}$



11. 坐標空間中 xy 平面上有一正方形，其頂點為 $O(0,0,0)$，$A(8,0,0)$，$B(8,8,0)$，$C(0,8,0)$。另一點 P 在 xy 平面的上方，且與 O，A，B，C 四點的距離皆等於 6。若 $x+by+cz=d$ 為通過 A，B，P 三點的平面，則 (b,c,d) $=$________。 【98. 學測】

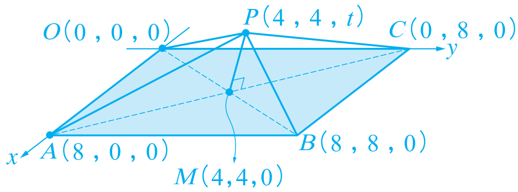
解：因爲 P 在正方形 $OABC$ 的正上方

假設 P 的坐標爲 $(4,4,t)$ 且 $t>0$

又 P 與 O，A，B，C 四點等距離

$\Rightarrow \overline{PO}=\sqrt{4^2+4^2+t^2}=6$

$\therefore t=2\ (t>0)$



分別將 $A(8,0,0)$，$B(8,8,0)$，$P(4,4,2)$ 代入 $x+by+cz=d$

$\Rightarrow \begin{cases} 8+b\times0+c\times0=d \\ 8+8b+c\times0=d \\ 4+4b+2c=d \end{cases}$! $d=8$，$b=0$，$c=2$ $\therefore (b,c,d)=(0,2,8)$

12. 求 $P(1,-1,5)$ 對平面 E：$x+2y+2z=18$ 的對稱點坐標為________。

解：令 P 對 E 之對稱點爲 $Q(1+t,-1+2t,5+2t)$

則 $\overline{PQ}$ 中點 $(1+\frac{1}{2}t,-1+t,5+t)$ 在平面 E 上

因此 $(1+\frac{1}{2}t)+2(-1+t)+2(5+t)=18 \Rightarrow t=2$

故對稱點爲 $(3,3,9)$

13. 下列哪些選項中的矩陣經過一系列的列運算後可以化成 $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 7 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$？

(A) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 7 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 & 5 \end{bmatrix}$ (B) $\begin{bmatrix} -1 & 3 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & -7 & 0 \end{bmatrix}$ (C) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 5 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 5 \end{bmatrix}$

(D) $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 & 6 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ (E) $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 7 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$． 【96. 學測】

解：將矩陣想成解 x，y，z 的方程組

$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 7 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ 經過列運算後可得 $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$，表有唯一解

$(x, y, z) = (2, 1, 1)$

(A) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 7 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 & 5 \end{bmatrix}$ 經過列運算後可得 $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$，表有唯一解

$(x, y, z) = (2, 1, 1)$

(B) $\begin{bmatrix} -1 & 3 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & -7 & 0 \end{bmatrix}$ 表常數項皆爲零的方程組，有 $(x, y, z) = (0, 0, 0)$ 之解

(C) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 5 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 5 \end{bmatrix}$ 表第一與第三個方程式相同的方程組，又第二個方程式與第一個方程式的 x，y，z 係數不成比例，故有無限多組解

(D) $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 & 6 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ 經過列運算後可得 $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 & 6 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$，表無解

(E) $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 7 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ 經過列運算後可得 $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$，表有唯一解

$(x, y, z) = (2, 1, 1)$

故選(A)(E)