

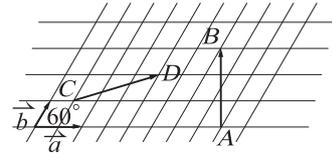
CHAP1 ALL

1. 右圖是兩組平行線，且相鄰兩線的距離均相等。

設 $|\vec{a}| = 2$ ， $|\vec{b}| = 1$ ，夾角為 60° ，下列選

項何者正確？ (A) $\vec{AB} = \vec{a} + 3\vec{b}$ (B) $\vec{CD} = \frac{3}{2}\vec{a} + \vec{b}$

(C) $\vec{a} \cdot \vec{b} = 2$ (D) $\vec{AB} \cdot \vec{CD} = \frac{1}{2}$ (E) $|\vec{CD}|^2 = 10$ 。



■：
(A) $\vec{AB} = -2 \cdot \left(\frac{1}{2}\vec{a}\right) + 3\vec{b} = -\vec{a} + 3\vec{b}$

(B) $\vec{CD} = 3 \cdot \left(\frac{1}{2}\vec{a}\right) + 1 \cdot \vec{b} = \frac{3}{2}\vec{a} + \vec{b}$

(C) $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos 60^\circ = 2 \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} = 1$

(D) $\vec{AB} \cdot \vec{CD} = (-\vec{a} + 3\vec{b}) \cdot \left(\frac{3}{2}\vec{a} + \vec{b}\right)$

$$= -\frac{3}{2}|\vec{a}|^2 + \frac{7}{2}\vec{a} \cdot \vec{b} + 3|\vec{b}|^2 = -\frac{3}{2} \cdot 4 + \frac{7}{2} + 3 = \frac{1}{2}$$

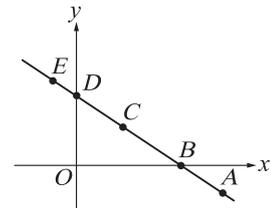
(E) $|\vec{CD}|^2 = \vec{CD} \cdot \vec{CD} = \left(\frac{3}{2}\vec{a} + \vec{b}\right) \cdot \left(\frac{3}{2}\vec{a} + \vec{b}\right)$

$$= \frac{9}{4}|\vec{a}|^2 + 3\vec{a} \cdot \vec{b} + |\vec{b}|^2 = \frac{9}{4} \cdot 4 + 3 + 1 = 13 \quad \text{故選(B)(D)}$$

2. 坐標平面上， O 為原點， A, B, C, D, E 五點在直線 L

上，則下列何者內積值最大？ (A) $\vec{OA} \cdot \vec{OB}$ (B) $\vec{OB} \cdot \vec{OB}$

(C) $\vec{OC} \cdot \vec{OB}$ (D) $\vec{OD} \cdot \vec{OB}$ (E) $\vec{OE} \cdot \vec{OB}$ 。



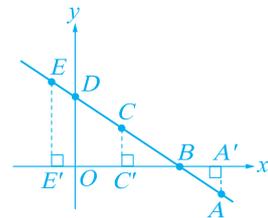
■：如右圖

(A) $\vec{OA} \cdot \vec{OB} = |\vec{OA}| \cos \theta \cdot |\vec{OB}| = \vec{OA}' \cdot \vec{OB}$

(B) $\vec{OB} \cdot \vec{OB} = |\vec{OB}|^2$

(C) $\vec{OC} \cdot \vec{OB} = |\vec{OC}| \cos \theta \cdot |\vec{OB}| = \vec{OC}' \cdot \vec{OB}$

(D) $\vec{OD} \cdot \vec{OB} = |\vec{OD}| |\vec{OB}| \cos 90^\circ = 0$



$$(E) \vec{OE} \cdot \vec{OB} = |\vec{OE}| \cos \theta |\vec{OB}| = -\vec{OE}' \cdot \vec{OB} < 0$$

$$\because \vec{OA}' > \vec{OB} > \vec{OC}' \Rightarrow \vec{OA} \cdot \vec{OB} > \vec{OB} \cdot \vec{OB} > \vec{OC} \cdot \vec{OB} > \vec{OD} \cdot \vec{OB} > \vec{OE} \cdot \vec{OB}$$

$$\therefore \vec{OA} \cdot \vec{OB} \text{ 最大}$$

- 3 坐標平面上有四點 $O(0, 0)$, $A(-3, -5)$, $B(6, 0)$, $C(x, y)$ 。今有一質點在 O 點沿 \vec{AO} 方向前進 AO 距離後停在 P , 再沿 \vec{BP} 方向前進 $2PB$ 距離後停在 Q 。假設此質點繼續沿 \vec{CQ} 方向前進 $3CQ$ 距離後回到原點 O , 則 $(x, y) = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

■：利用平面向量坐標表示法，來計算向量的加法、減法和係數積

$$\text{已知 } \vec{OP} = \vec{AO} = (3, 5)$$

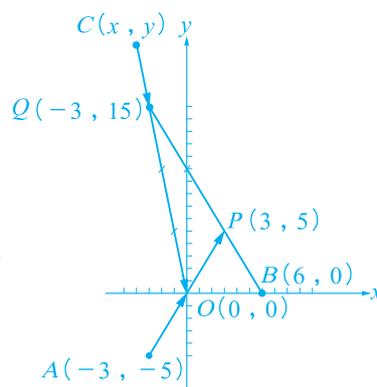
$$\text{又 } \vec{PQ} = 2\vec{BP} = 2(-3, 5) \Rightarrow \vec{OQ} - \vec{OP} = (-6, 10)$$

$$\begin{aligned} \text{得 } \vec{OQ} &= \vec{OP} + (-6, 10) = (3, 5) + (-6, 10) \\ &= (-3, 15) \end{aligned}$$

$$\text{令 } \vec{CQ} = (-3-x, 15-y)$$

$$\because 3\vec{CQ} = \vec{QO}$$

$$\Rightarrow 3(-3-x, 15-y) = (3, -15) \Rightarrow (x, y) = (-4, 20)$$



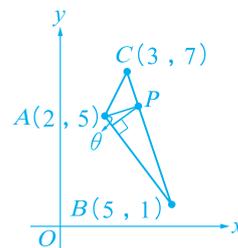
4. 若 $\triangle ABC$ 的三頂點坐標為 $A(2, 5)$, $B(5, 1)$ 及 $C(3, 7)$, P 為線段 BC 上的一點，且 \vec{AP} 在 \vec{AB} 上的正射影向量為 $(\frac{6}{25}, -\frac{8}{25})$, 試求 P 點坐標為 $\underline{\hspace{2cm}}$ 。

$$\blacksquare: \vec{OP} = t\vec{OB} + (1-t)\vec{OC} = t(5, 1) + (1-t)(3, 7)$$

$$\therefore P(2t+3, 7-6t)$$

$$\vec{AP} \text{ 在 } \vec{AB} \text{ 上的正射影向量爲 } \vec{v} = (\frac{6}{25}, -\frac{8}{25})$$

$$\vec{AP} = (2t+1, 2-6t), \vec{AB} = (3, -4)$$



$$|\vec{AP}| \cos \theta = |\vec{AP}| \cdot \frac{\vec{AP} \cdot \vec{AB}}{|\vec{AP}| |\vec{AB}|} = \frac{6t+3-8+24t}{\sqrt{9+16}} = \frac{30t-5}{5} \dots\dots\dots ①$$

$$|\vec{v}| = \sqrt{\frac{36}{625} + \frac{64}{625}} = \frac{10}{25} = \frac{2}{5} \dots\dots\dots ②$$

由①、②得 $30t-5=2 \Rightarrow t=\frac{7}{30} \therefore P$ 點坐標為 $(\frac{52}{15}, \frac{28}{5})$

5. 設 $A(4, 3)$, $B(6, 8)$, $O(0, 0)$ 為平面上之三點, 令 C 點為 \overline{OB} 之中點,

且令 $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$, $\vec{b} = \overrightarrow{OB}$, 則下列何者為真? (A) 向量 $\vec{a} + \vec{b}$ 的長度為 15

(B) 內積 $\vec{a} \cdot \vec{b} = 48$ (C) $\triangle OAB$ 的面積為 7 (D) A 點到直線 OB 的距離為 $\frac{7}{5}$

(E) $\overrightarrow{AC} = (1, -1)$

■ : (A) $\vec{a} = (4, 3)$, $\vec{b} = (6, 8)$, $\vec{a} + \vec{b} = (10, 11)$, $|\vec{a} + \vec{b}| = \sqrt{221}$

(B) $\vec{a} \cdot \vec{b} = 48$

(C) $\triangle OAB$ 的面積為 $\frac{1}{2} \sqrt{5^2 \cdot 10^2 - 48^2} = 7$

(D) 直線 OB 為 $4x - 3y = 0$, $d(A, \overleftrightarrow{OB}) = \frac{7}{5}$

(E) $C(3, 4)$, $\overrightarrow{AC} = (-1, 1)$

故選(B)(C)(D)

6. 設 O 為坐標平面上的原點, P 點坐標為 $(2, 1)$; 若 A, B 分別是正 x -軸及正 y -軸上的點, 使得 $\overrightarrow{PA} \perp \overrightarrow{PB}$, 則 $\triangle OAB$ 面積的最大可能值為_____。(化成最簡分數)

■ : 設 $A(a, 0)$, $B(0, b)$, 則 $\overrightarrow{PA} = (a-2, -1)$, $\overrightarrow{PB} = (-2, b-1)$

$$\therefore \overrightarrow{PA} \perp \overrightarrow{PB} \Leftrightarrow \overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB} = 0 \Leftrightarrow (a-2)(-2) + (-1)(b-1) = 0 \Leftrightarrow 2a+b=5$$

而 $\triangle OAB$ 面積為 $\frac{ab}{2}$

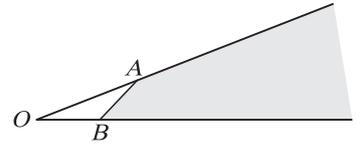
由算幾不等式知： $\frac{2a+b}{2} \geq \sqrt{2a \cdot b} \Leftrightarrow \frac{5}{2} \geq \sqrt{2ab}$

$\Leftrightarrow \frac{25}{4} \geq 2ab \Leftrightarrow \frac{25}{16} \geq \frac{ab}{2} = \triangle OAB$ 面積，故最大值為 $\frac{25}{16}$

7. 如右圖，兩射線 OA 與 OB 交於 O 點，試問下列選項中哪些向量的終點會落在陰影區域內？

(A) $\overrightarrow{OA} + 2\overrightarrow{OB}$ (B) $\frac{3}{4}\overrightarrow{OA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{OB}$ (C) $\frac{3}{4}\overrightarrow{OA} - \frac{1}{3}\overrightarrow{OB}$

(D) $\frac{3}{4}\overrightarrow{OA} + \frac{1}{5}\overrightarrow{OB}$ (E) $\frac{3}{4}\overrightarrow{OA} - \frac{1}{5}\overrightarrow{OB}$.



■：令 P 在 \overline{AB} 上 $\Leftrightarrow \overrightarrow{OP} = (1-\alpha)\overrightarrow{OA} + \alpha\overrightarrow{OB}$

又 $\overrightarrow{OQ} = t\overrightarrow{OP}$ 且 $t > 1$ ，則 Q 落在陰影區

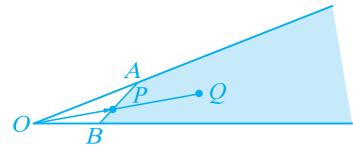
$\therefore \overrightarrow{OQ} = t(1-\alpha)\overrightarrow{OA} + t\alpha\overrightarrow{OB}$

係數和為 $t(1-\alpha) + t\alpha = t > 1$

(A) $1+2 > 1$ (B) $\frac{3}{4} + \frac{1}{3} > 1$ (C) $-\frac{1}{3}\overrightarrow{OB}$ 與 \overrightarrow{OB} 反向

(D) $\frac{3}{4} + \frac{1}{5} < 1$ (E) $-\frac{1}{5}\overrightarrow{OB}$ 與 \overrightarrow{OB} 反向

故應選(A)(B)



8. 設 $\triangle ABC$ 為一等腰直角三角形， $\angle BAC = 90^\circ$ 。若 P, Q 為斜邊 \overline{BC} 的三等分點，則 $\tan \angle PAQ =$ _____。（化成最簡分數）

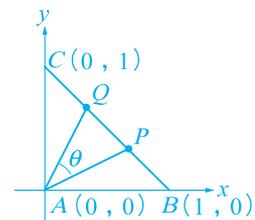
■：將 $\triangle ABC$ 坐標化，取 $A(0, 0)$ ， $B(1, 0)$ ， $C(0, 1)$ ，如右圖所示

$\because C, Q, P, B$ 共線且 $\overline{BP} : \overline{PC} = 1 : 2$ ， $\overline{BQ} : \overline{QC} = 2 : 1$

由分點公式分別得

$$\overrightarrow{AP} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC} = \frac{2}{3}(1, 0) + \frac{1}{3}(0, 1) = \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)$$

$$\overrightarrow{AQ} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AC} = \frac{1}{3}(1, 0) + \frac{2}{3}(0, 1) = \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$$



$$\begin{aligned} \therefore \cos \theta &= \frac{\vec{AP} \cdot \vec{AQ}}{|\vec{AP}| |\vec{AQ}|} = \frac{\left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right) \cdot \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)}{\sqrt{\left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^2} \cdot \sqrt{\left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^2}} \\ &= \frac{\frac{2}{9} + \frac{2}{9}}{\sqrt{\frac{5}{9}} \cdot \sqrt{\frac{5}{9}}} = \frac{4}{5} \quad \therefore \tan \theta = \frac{3}{4} \end{aligned}$$

9. 設 ABC 為坐標平面上三角形， P 為平面上一點且 $\vec{AP} = \frac{1}{5}\vec{AB} + \frac{2}{5}\vec{AC}$ ，則

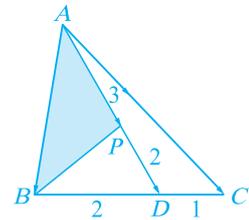
$\frac{\triangle ABP \text{ 面積}}{\triangle ABC \text{ 面積}}$ 等於 (A) $\frac{1}{5}$ (B) $\frac{1}{4}$ (C) $\frac{2}{5}$ (D) $\frac{1}{2}$ (E) $\frac{2}{3}$ 。

■：令 $\vec{AD} = t\vec{AP}$

$$\text{則由已知得 } \vec{AD} = t\left(\frac{1}{5}\vec{AB} + \frac{2}{5}\vec{AC}\right) = \frac{t}{5}\vec{AB} + \frac{2t}{5}\vec{AC}$$

$$\text{因爲 } B, D, C \text{ 三點共線，所以 } \frac{t}{5} + \frac{2t}{5} = 1 \Rightarrow t = \frac{5}{3}$$

$$\text{即 } \vec{AD} = \frac{5}{3}\vec{AP} \Rightarrow \vec{AP} : \vec{PD} = 3 : 2, \text{ 又 } \vec{BD} : \vec{DC} = 2 : 1, \text{ 則}$$

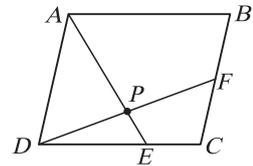


$$\frac{\triangle ABP \text{ 面積}}{\triangle ABC \text{ 的面積}} = \frac{\frac{3}{5} \triangle ABD \text{ 面積}}{\triangle ABC \text{ 面積}} = \frac{\frac{3}{5} \left(\frac{2}{3} \triangle ABC \text{ 面積}\right)}{\triangle ABC \text{ 面積}} = \frac{\frac{2}{5} \triangle ABC \text{ 面積}}{\triangle ABC \text{ 面積}} = \frac{2}{5} \text{ 選(C)}$$

10. 如右圖， $ABCD$ 是平行四邊形， $\vec{BF} : \vec{FC} = 1 : 1$ ，

$\vec{CE} : \vec{ED} = 1 : 2$ ， \vec{AE} 交 \vec{DF} 於 P ，設 $\vec{BP} = x\vec{BA} + y\vec{BC}$ ，

求數對 $(x, y) = \underline{\hspace{2cm}}$ 。



■：(1) $\vec{BE} = \vec{BC} + \vec{CE} = \vec{BC} + \frac{1}{3}\vec{CD} = \vec{BC} + \frac{1}{3}\vec{BA} \quad \therefore \vec{BC} = \vec{BE} - \frac{1}{3}\vec{BA}$

$$\therefore \vec{BP} = x\vec{BA} + y\left(\vec{BE} - \frac{1}{3}\vec{BA}\right) = \left(x - \frac{1}{3}y\right)\vec{BA} + y\vec{BE}$$

$$\because A, P, E \text{ 共線} \quad \therefore \left(x - \frac{1}{3}y\right) + y = 1$$

(2) $\vec{BD} = \vec{BA} + \vec{AD} = \vec{BA} + \vec{BC} = \vec{BA} + 2\vec{BF} \quad \therefore \vec{BA} = \vec{BD} - 2\vec{BF}$

$$\vec{BP} = x \cdot (\vec{BD} - 2\vec{BF}) + y \cdot 2\vec{BF} = x\vec{BD} + (-2x + 2y)\vec{BF}$$

$$\because D, P, F \text{ 共線} \quad \therefore x + (-2x + 2y) = 1$$

$$\text{由(1)、(2)得} \begin{cases} x + \frac{2}{3}y = 1 \\ -x + 2y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{3}{4} \\ x = \frac{1}{2} \end{cases}, \text{故數對 } (x, y) = \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right)$$

11. 設 A, B, P 三點共線，且 $\overline{AP} : \overline{BP} = m : n$ ，則下列何者正確？

(A) P 為 \overline{AB} 的內分點時， $m\overrightarrow{PB} + n\overrightarrow{PA} = \vec{0}$

(B) P 為 \overline{AB} 的外分點時， $m\overrightarrow{PB} - n\overrightarrow{PA} = \vec{0}$

(C) P 為 \overline{AB} 的內分點時， $\overrightarrow{OP} = \frac{m\overrightarrow{OB} + n\overrightarrow{OA}}{m+n}$

(D) P 為 \overline{AB} 的外分點時， $\overrightarrow{OP} = \frac{m\overrightarrow{OB} - n\overrightarrow{OA}}{m-n}$

(E) 若 $\overrightarrow{OP} = \alpha\overrightarrow{OA} + \beta\overrightarrow{OB}$ ，則 $\alpha + \beta = 1$ 。

■： P 為內分點時， $m\overrightarrow{PB} + n\overrightarrow{PA} = \vec{0}$ ， $\overrightarrow{OP} = \frac{n\overrightarrow{OA} + m\overrightarrow{OB}}{m+n}$

P 為外分點時， $m\overrightarrow{PB} - n\overrightarrow{PA} = \vec{0}$ ， $\overrightarrow{OP} = \frac{m\overrightarrow{OB} - n\overrightarrow{OA}}{m-n} = \frac{n\overrightarrow{OA} - m\overrightarrow{OB}}{n-m}$

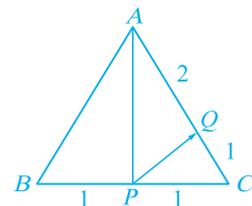
且 $\frac{n}{n-m} + \frac{-m}{n-m} = 1$ 故全選

12. 在坐標平面上的 $\triangle ABC$ 中， P 為 \overline{BC} 邊之中點， Q 在 \overline{AC} 邊上且 $\overline{AQ} = 2\overline{QC}$ 。已知 \overline{PA}

$= (4, 3)$ ， $\overrightarrow{PQ} = (1, 5)$ ，則 $\overline{BC} = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

■： $\because \overline{AQ} : \overline{QC} = 2 : 1 \quad \therefore \overrightarrow{PQ} = \frac{2}{3}\overrightarrow{PC} + \frac{1}{3}\overrightarrow{PA}$

而 $\overline{BC} = 2\overrightarrow{PC} = 2 \cdot \frac{3}{2}(\overrightarrow{PQ} - \frac{1}{3}\overrightarrow{PA}) = 3\overrightarrow{PQ} - \overrightarrow{PA}$
 $= (3, 15) - (4, 3) = (-1, 12)$



13. P 為 $\triangle ABC$ 內部一點， $\vec{PA} + 2\vec{PB} + 3\vec{PC} = \vec{0}$ ， $\vec{PA} \cdot \vec{PB} = -4$ ， $\vec{PB} \cdot \vec{PC} = -\frac{10}{3}$ ，

$\vec{PC} \cdot \vec{PA} = -2$ ，則下列何者為真？ (A) $|\vec{PA}| = \sqrt{14}$ (B) $|\vec{PB}| = \sqrt{7}$

(C) $|\vec{AB}| = \sqrt{29}$ (D) $\triangle PAB = \frac{\sqrt{82}}{2}$ (E) $\triangle ABC = \sqrt{82}$.

■ : (A) $\vec{PA} \cdot (\vec{PA} + 2\vec{PB} + 3\vec{PC}) = 0 \Leftrightarrow |\vec{PA}|^2 + 2\vec{PA} \cdot \vec{PB} + 3\vec{PA} \cdot \vec{PC} = 0$
 $\Leftrightarrow |\vec{PA}|^2 + (-8) + (-6) = 0 \Leftrightarrow |\vec{PA}| = \sqrt{14}$

(B) $\vec{PB} \cdot (\vec{PA} + 2\vec{PB} + 3\vec{PC}) = 0 \Leftrightarrow (-4) + 2|\vec{PB}|^2 + 3(-\frac{10}{3}) = 0$

$\Leftrightarrow |\vec{PB}| = \sqrt{7}$

(C) $|\vec{AB}| = |\vec{AB}| = |\vec{PB} - \vec{PA}| = \sqrt{|\vec{PB}|^2 - 2\vec{PA} \cdot \vec{PB} + |\vec{PA}|^2}$
 $= \sqrt{7 - 2 \cdot (-4) + 14} = \sqrt{29}$

(D) $\triangle PAB = \frac{1}{2} \sqrt{|\vec{PA}|^2 |\vec{PB}|^2 - (\vec{PA} \cdot \vec{PB})^2} = \frac{\sqrt{82}}{2}$

(E) $\ell \vec{PA} + m \vec{PB} + n \vec{PC} = \vec{0}$

$\Leftrightarrow \triangle PAB : \triangle PBC : \triangle PCA = \frac{1}{\ell m} : \frac{1}{m n} : \frac{1}{\ell n} = \frac{1}{2} : \frac{1}{6} : \frac{1}{3} = 3 : 1 : 2$

$\Leftrightarrow \triangle PAB = \frac{1}{2} \triangle ABC = \frac{\sqrt{82}}{2} \Leftrightarrow \triangle ABC = \sqrt{82}$

故全選

14. 若 D 為 $\triangle ABC$ 內部一點，且 $2\vec{AD} + 3\vec{BD} + \vec{CD} = \vec{0}$ ，且 $\vec{AD} = x\vec{AB} + y\vec{AC}$ ，則：

(1) 數對 $(x, y) = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

(2) $\triangle ABD$ 的面積： $\triangle ACD$ 的面積： $\triangle BCD$ 的面積 = $\underline{\hspace{2cm}}$ 。

■：(1) $\because 2\vec{AD} + 3\vec{BD} + \vec{CD} = \vec{0}$

$$\therefore 2\vec{AD} + 3(\vec{AD} - \vec{AB}) + (\vec{AD} - \vec{AC}) = \vec{0}$$

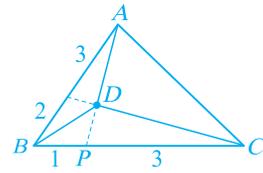
$$\therefore \vec{AD} = \frac{3}{6}\vec{AB} + \frac{1}{6}\vec{AC}$$

$$\Rightarrow \text{數對 } (x, y) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{6}\right)$$

(2) $\therefore \triangle ABD$ 的面積： $\triangle ACD$ 的面積 = 1 : 3

相同方法可得 $\triangle ACD$ 的面積： $\triangle BCD$ 的面積 = 3 : 2

$\therefore \triangle ABD$ 的面積： $\triangle ACD$ 的面積： $\triangle BCD$ 的面積 = 1 : 3 : 2



15. 平行四邊形 $ABCD$ 中， E 在 \overline{CD} 上， $\overline{DE} : \overline{EC} = 2 : 1$ ， F 在 \overline{AD} 上， $\overline{AF} : \overline{FD} = 2 : 3$ ，

\overline{BF} 交 \overline{AE} 於 P ，若 $\vec{AP} = x\vec{AB} + y\vec{AD}$ ，則數對 $(x, y) = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

■：如右圖，延長 \overleftrightarrow{AE} 交 \overleftrightarrow{BC} 於 Q

$$\because \triangle ADE \sim \triangle QCE \Rightarrow \overline{AD} : \overline{CQ} = \overline{DE} : \overline{CE} = 2 : 1$$

$$\Rightarrow \overline{CQ} = \frac{1}{2}\overline{AD}$$

$$\text{令 } \overline{AF} = 2r, \overline{FD} = 3r, \text{ 則 } \overline{CQ} = \frac{1}{2}\overline{AD} = \frac{5}{2}r$$

$$\text{又 } \triangle AFP \sim \triangle QBP \quad \Rightarrow \overline{PF} : \overline{PB} = \overline{AF} : \overline{BQ} = 2r : \left(5r + \frac{5}{2}r\right) = 4 : 15$$

$$\therefore \vec{AP} = \frac{4}{19}\vec{AB} + \frac{15}{19}\vec{AF} = \frac{4}{19}\vec{AB} + \frac{15}{19} \cdot \frac{2}{5}\vec{AD} = \frac{4}{19}\vec{AB} + \frac{6}{19}\vec{AD}$$

$$\text{故數對 } (x, y) = \left(\frac{4}{19}, \frac{6}{19}\right)$$

