

3-4

球面與平面的關係

例題 1

試求與平面 $x+2y+3z=9$ 平行且與球面 $S: x^2+y^2+z^2=4$ 相切的平面方程式為_____。

■：設與 $x+2y+3z=9$ 平行的平面為 $E: x+2y+3z+d=0$

又 $S: x^2+y^2+z^2=2^2$ ，球心 $Q(0, 0, 0)$ ，球半徑 $r=2$

$$\because E \text{ 與 } S \text{ 相切} \Leftrightarrow d(Q, E) = r \Leftrightarrow d(Q, E) = 2 \Leftrightarrow \frac{|0+2 \cdot 0+3 \cdot 0+d|}{\sqrt{1^2+2^2+3^2}} = 2$$

$$\therefore d = \pm 2\sqrt{14} \quad \therefore E: x+2y+3z \pm 2\sqrt{14} = 0$$

例題 2

空間中有一球面 $S: x^2+y^2+z^2-2x+2y-2z-7=0$ 及一平面 $E: 2x-y+2z+k=0$ ($k \in R$)

(1) 若平面 E 與球面 S 不相交，則 k 的範圍為_____。

(2) 若平面 E 與球面 S 相切，則 k 值可為_____。

(3) 若 $k=1$ 則 E 與 S 交於一圓 C ，此時

① 圓 C 的圓心坐標為_____。

② 圓 C 的面積為_____。

③ 以圓 C 為底， S 之中心為頂的圓錐體積為_____。

■： $S: x^2+y^2+z^2-2x+2y-2z-7=0$

$$\Leftrightarrow (x-1)^2 + (y+1)^2 + (z-1)^2 = 10 = (\sqrt{10})^2$$

球心 Q 為 $(1, -1, 1)$ ，球半徑為 $\sqrt{10}$

$$(1) \quad d(Q, E) > \sqrt{10} \Leftrightarrow \frac{|2+1+2+k|}{\sqrt{2^2+(-1)^2+2^2}} > \sqrt{10} \Leftrightarrow |5+k| > 3\sqrt{10}$$

$$\therefore k > -5+3\sqrt{10} \text{ 或 } k < -5-3\sqrt{10}$$

$$(2) \quad d(Q, E) = \sqrt{10} \Leftrightarrow \frac{|2+1+2+k|}{\sqrt{2^2+(-1)^2+2^2}} = \sqrt{10} \Leftrightarrow |5+k| = 3\sqrt{10}$$

$$\therefore k = -5 \pm 3\sqrt{10}$$

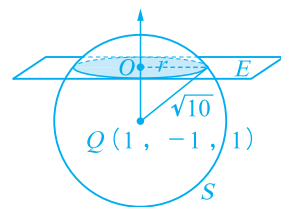
(3) ① $k=1 \Leftrightarrow E: 2x-y+2z+1=0$ ，法向量 $\vec{n} = (2, -1, 2)$ ，

E 與 S 交於一圓 C ，圓心 $O(x, y, z)$

$$\because \vec{QO} \parallel \vec{n} \Rightarrow \therefore O: \begin{cases} x=1+2t \\ y=-1-t, t \in R, \text{ 又 } O \in E \\ z=1+2t \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow 2(1+2t) - (-1-t) + 2(1+2t) + 1 = 0$$

$$\therefore t = -\frac{2}{3} \Leftrightarrow O\left(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\right)$$



$$\textcircled{2} d(Q, E) = \frac{|2+1+2+1|}{\sqrt{2^2+(-1)^2+2^2}} = 2 = \overline{QO}$$

$$\therefore r^2 = (\sqrt{10})^2 - 2^2 = 6, \text{ 圓 } C \text{ 的面積為 } 6\pi$$

$$\textcircled{3} \text{ 圓錐體積} = \frac{1}{3} \text{ 底面積} \times \text{高} = \frac{1}{3} \times 6\pi \times 2 = 4\pi$$

例題 3

平面 $E: x+y-z=5$ 截球 $S: x^2+y^2+z^2-2y+2z=2$ 於一圓，則此圓的圓心坐標為 _____，半徑為 _____。

■： $S: x^2 + (y-1)^2 + (z+1)^2 = 2^2$ ，球心為 $Q(0, 1, -1)$

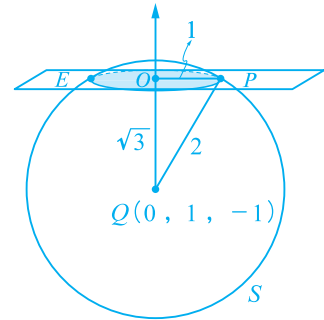
$$E: x+y-z=5, \text{ 法向量 } \vec{n} = (1, 1, -1)$$

$$\therefore \overrightarrow{QO} \parallel \vec{n} \quad \therefore O: \begin{cases} x=t \\ y=1+t \\ z=-1-t \end{cases}$$

$$O \in E \Leftrightarrow t + (1+t) - (-1-t) = 5$$

$$\Leftrightarrow t=1 \quad \therefore O = (1, 2, -2)$$

$$\therefore d(Q, E) = \sqrt{3} \quad \therefore r = \overline{OP} = \sqrt{2^2 - (\sqrt{3})^2} = 1$$



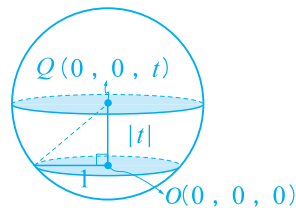
例題 4

在平面 $z=0$ 上有一圓，其圓心為 $O(0, 0, 0)$ ，半徑為 1，今有一球，其球面含此圓及點 $(0, 0, \sqrt{3})$ ，則此球之半徑為 _____。

■：設球心 $Q(0, 0, t)$ ，半徑 $\sqrt{t^2+1}$

$$\sqrt{t^2+1} = |t - \sqrt{3}| \Leftrightarrow t = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\therefore \text{半徑為 } \sqrt{t^2+1} = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2}{3}\sqrt{3}$$



例題 5

設球面 S 與 xy 平面的交圓為 $x^2+y^2-2x-6y+1=0$ ，若 S 過點 $(5, 6, 2)$ ，則球面 S 的方程式為 _____。

■： $x^2+y^2-2x-6y+1=0 \Leftrightarrow (x-1)^2 + (y-3)^2 = 9$

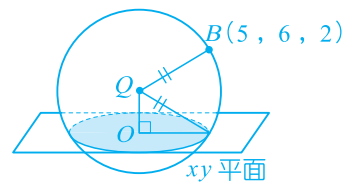
圓心 $O(1, 3, 0)$ ，半徑 3

令球心 $Q(1, 3, c)$ ， $B(5, 6, 2)$

$$\text{由 } \overline{QB}^2 = \overline{QO}^2 + 3^2 \text{ 得 } 4^2 + 3^2 + (c-2)^2 = c^2 + 9$$

$$\Leftrightarrow c=5 \quad \therefore Q(1, 3, 5), \text{ 球面半徑 } \sqrt{5^2+3^2} = \sqrt{34},$$

$$\text{球面方程式為 } (x-1)^2 + (y-3)^2 + (z-5)^2 = 34$$



例題 6

球面 $S: x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y + 4z = 0$ ，平面 $E: 2x - y - 2z + 7 = 0$ ，點 P 在 S 上，當 P 到 E 的距離有最大值時， P 點坐標為_____。

■： $S: (x-1)^2 + (y+2)^2 + (z+2)^2 = 9$ ，

球心 $Q(1, -2, -2)$ ，半徑 $r=3$

$$\square d(Q, E) = \frac{|2+2+4+7|}{\sqrt{4+1+4}} = 5$$

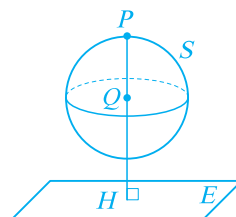
設 Q 在 E 的垂足 $H(1+2t, -2-t, -2-2t)$

代入 E 得 $2(1+2t) - (-2-t) - 2(-2-2t) + 7 = 0$

$$\square t = -\frac{5}{3}$$

$$\therefore \vec{QP} = -\frac{3}{5} \vec{QH} = -\frac{3}{5} (2t, -t, -2t) = (2, -1, -2)$$

$\therefore P$ 點坐標為 $(1, -2, -2) + (2, -1, -2) = (3, -3, -4)$



例題 7

球面 $S_1: x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y - 6z - 11 = 0$ 與 $S_2: x^2 + y^2 + z^2 + 2x + 2y + 6z - 7 = 0$ ， S_1 ， S_2 相交於一圓 C ，則：

(1) 圓 C 的面積為_____。

(2) 圓 C 的圓心坐標為_____。

■：(1) 圓 C 所在平面 $E: S_1 - S_2$ ，即 $E: 2x + 3y + 6z + 2 = 0$

$$S_1: (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = 25$$

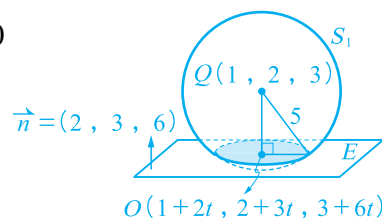
球心 $Q(1, 2, 3)$

$$d(Q, E) = \frac{2+6+18+2}{\sqrt{4+9+36}} = 4$$

因此圓 C 之半徑為 $\sqrt{5^2 - 4^2} = 3$ ，圓 C 之面積為 9π

(2) 設圓 C 之圓心 $O(1+2t, 2+3t, 3+6t)$

O 代入平面 E 得 $2+4t+6+9t+18+36t+2=0 \Leftrightarrow t = -\frac{4}{7}$ ，因此 $O(-\frac{1}{7}, \frac{2}{7}, -\frac{3}{7})$



例題 8

過球面 $S: x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y - 6z + 1 = 0$ 上一點 $(1, 1, 1)$ ，求所作的切平面方程式為_____。

■ :

$$\text{已知切點 } (1, 1, 1), \text{ 利用切平面公式 } \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 \rightarrow 1 \cdot x \\ y^2 \rightarrow 1 \cdot y \\ z^2 \rightarrow 1 \cdot z \end{cases} \begin{cases} x \rightarrow \frac{x+1}{2} \\ y \rightarrow \frac{y+1}{2} \\ z \rightarrow \frac{z+1}{2} \end{cases}$$

$$\therefore \text{切平面方程式爲 } x+y+z-2\left(\frac{x+1}{2}\right)+4\left(\frac{y+1}{2}\right)-6\left(\frac{z+1}{2}\right)+1=0$$

$$\Leftrightarrow 3y-2z-1=0$$

例題 9

通過 $(2, 1, 0)$ 與 $(\frac{1}{2}, 0, 1)$ 兩點的平面，且與球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 相切，則切點坐標為_____或_____。

■ : 設切點 $P(x_0, y_0, z_0)$ ，球心 $Q(0, 0, 0)$

$$\Leftrightarrow \text{切平面的法向量 } \overrightarrow{QP} = (x_0, y_0, z_0)$$

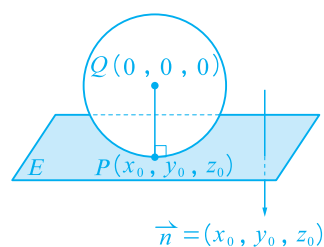
$$\Leftrightarrow \text{切平面方程式爲 } x_0x + y_0y + z_0z = 1$$

$$\text{又切平面過 } (2, 1, 0) \Leftrightarrow 2x_0 + y_0 = 1 \dots\dots\dots \textcircled{1}$$

$$\text{亦過 } (\frac{1}{2}, 0, 1) \Leftrightarrow \frac{1}{2}x_0 + z_0 = 1 \dots\dots\dots \textcircled{2}$$

$$\text{且切點 } P \text{ 在球面上 } \therefore x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 = 1 \dots\dots\dots \textcircled{3}$$

$$\text{由 } \textcircled{1}、\textcircled{2}、\textcircled{3} \text{ 得解 } (x_0, y_0, z_0) = (\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{2}{3}) \text{ 或 } (\frac{2}{7}, \frac{3}{7}, \frac{6}{7})$$



例題 10

已知從點 $Q'(1, 2, 2)$ 到球面 $S: x^2+y^2+z^2=1$ 所有切線，所有的切點形成一個圓 C 且都會在同一平面上，則點 Q' 到球面 S 的切線長為_____。

$$\blacksquare : \text{切線長爲 } \sqrt{1^2+2^2+2^2-1} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

例題 11

某一球形之地球儀其赤道長為 100 公分，則北緯 30° 的緯線長為_____公分。

■ : 設地球儀半徑 r ，則赤道長 $2\pi r = 100$

$$\text{而北緯 } 30^\circ \text{ 的緯度之半徑爲 } r \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} r$$

$$\text{其周長 } 2\pi \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} r = \sqrt{3} \pi r = 50\sqrt{3} \text{ (公分)}$$

例題 12

球面 $S: x^2 + (y-1)^2 + (z+2)^2 = 4$, S 上有兩點 $A(0, 1, 0)$,

$B(1, 2, -2 + \sqrt{2})$, 試求 A, B 兩點在球面上的最短距離為_____。

■: $S: x^2 + (y-1)^2 + (z+2)^2 = 4$, 球心 $Q(0, 1, -2)$, 半徑 $r=2$

$$\overrightarrow{QA} = (0, 0, 2), \overrightarrow{QB} = (1, 1, \sqrt{2}), \cos \angle AQB = \frac{2\sqrt{2}}{2 \cdot 2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\Rightarrow \angle AQB = \frac{\pi}{4} \quad \therefore \text{球面距離 } \widehat{AB} = 2 \cdot \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$$

例題 13

設一地球儀的球心為空間坐標的原點, 有兩個城市的坐標分別為 $A(1, 2, 2)$, $B(2, -2, 1)$ 。假定地球為半徑等於 6400 公里的圓球, 試問飛機從 A 城市直飛至 B 城市的最短航線長最接近下列哪一個選項的值? (A) 8000 (B) 8500 (C) 9000

(D) 9500 (E) 10000 公里。

[94. 指考乙]

■: $\overrightarrow{OA} = (1, 2, 2), \overrightarrow{OB} = (2, -2, 1)$

$$\cos \angle AOB = \frac{\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB}}{|\overrightarrow{OA}| |\overrightarrow{OB}|} = \frac{2 - 4 + 2}{3 \cdot 3} = 0 \Rightarrow \angle AOB = \frac{\pi}{2}$$

$$\Rightarrow \widehat{AB} = 6400 \cdot \frac{\pi}{2} \div 3200 \cdot 3.1416 = 10053.12 \text{ (公里)} \quad \text{故選(E)}$$

例題 14

以地心為原點, 南北極軸為 z 軸 (北極為正向), 赤道位於 xy 平面上, 經度 0° 的經線經過正 x 軸, 地球半徑為 6000 公里, A 地位於東經 60° 北緯 30° , B 地位於東經 120° 北緯 60° , 試求: (1) A 地之坐標為_____。(2) B 地之坐標為_____。

■: 地球上某一點的坐標為 $6000(\cos \text{緯} \cos \text{經}, \cos \text{緯} \sin \text{經}, \sin \text{緯})$

(1) A 的坐標為 $6000(\cos 30^\circ \cos 60^\circ, \cos 30^\circ \sin 60^\circ, \sin 30^\circ)$

$$= 6000 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2} \right) = 1500(\sqrt{3}, 3, 2)$$

(2) B 的坐標為 $6000(\cos 60^\circ \cos 120^\circ, \cos 60^\circ \sin 120^\circ, \sin 60^\circ)$

$$= 6000 \left(\frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right), \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = 1500(-1, \sqrt{3}, 2\sqrt{3})$$