

## 例題 1

完成下列表格：

已知下列各條件	試依左列各條件求球面方程式
(1) 以 $Q(3, 4, 5)$ 為球心，半徑為 5	$(x-3)^2 + (y-4)^2 + (z-5)^2 = 25$
(2) 以 $Q(-1, 2, 4)$ 為球心，且經過點 $P(-2, 5, 6)$	$(x+1)^2 + (y-2)^2 + (z-4)^2 = 14$
(3) 以 $P(2, 3, 5)$ ， $R(4, 5, -1)$ 為直徑兩端點	$(x-3)^2 + (y-4)^2 + (z-2)^2 = 11$ 或 $(x-2)(x-4) + (y-3)(y-5) + (z-5)(z+1) = 0$

## 【球面標準式】

## 例題 2

方程式  $x^2 + y^2 + z^2 - 2y - 2z - 23 = 0$  表一球面，則：

(1) 球心坐標為\_\_\_\_\_。(2) 球半徑為\_\_\_\_\_。

$$\blacksquare : S : x^2 + y^2 + z^2 - 2y - 2z - 23 = 0 \Leftrightarrow S : x^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = 25 = 5^2$$

 $\therefore$  球心坐標為  $(0, 1, 1)$ ，球半徑為 5

## 【球面標準式】

## 例題 3

方程式  $x^2 + y^2 + z^2 + (k+1)x + (k+3)y = k-5$  表一半徑為 5 的球面，則  $k = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

$$\blacksquare : x^2 + (k+1)x + \left(\frac{k+1}{2}\right)^2 + y^2 + (k+3)y + \left(\frac{k+3}{2}\right)^2 + z^2 = k-5 + \left(\frac{k+1}{2}\right)^2 + \left(\frac{k+3}{2}\right)^2$$

$$\therefore S : \left(x + \frac{k+1}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{k+3}{2}\right)^2 + z^2 = \frac{2k^2 + 12k - 10}{4}$$

$$\Leftrightarrow \frac{2k^2 + 12k - 10}{4} = 5^2 \Leftrightarrow k^2 + 6k - 55 = 0 \quad \therefore k = -11 \text{ 或 } 5$$

## 【球面的一般式】

## 例題 4

在空間中，正四面體  $ABCD$  的頂點是  $A(0, 0, 0)$ ， $B(0, -1, -1)$ ， $C(-1, 0, -1)$ ， $D(-1, -1, 0)$ ，通過這四點之球面方程式為\_\_\_\_\_。

$$\blacksquare : \text{設球面方程式 } S : x^2 + y^2 + z^2 + dx + ey + fz + g = 0$$

再將  $A(0, 0, 0)$ ， $B(0, -1, -1)$ ， $C(-1, 0, -1)$ ， $D(-1, -1, 0)$

$$\text{代入 } S \text{ 中} \Rightarrow \begin{cases} 0^2+0^2+0^2+d \cdot 0+e \cdot 0+f \cdot 0+g=0 \\ (-1)^2+(-1)^2-e-f+g=0 \\ (-1)^2+(-1)^2-d-f+g=0 \\ (-1)^2+(-1)^2-d-e+g=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} g=0 \dots\dots\dots ① \\ e+f=2 \dots\dots\dots ② \\ d+f=2 \dots\dots\dots ③ \\ d+e=2 \dots\dots\dots ④ \end{cases}$$

$$②+③+④ \Rightarrow 2(d+e+f)=6 \quad \therefore d+e+f=3 \dots\dots\dots ⑤$$

$$⑤-② \Rightarrow d=1; \quad ⑤-③ \Rightarrow e=1; \quad ⑤-④ \Rightarrow f=1$$

$$\Rightarrow S: x^2+y^2+z^2+x+y+z=0$$

### 例題 5

若一球面的球心在  $x$  軸上，且過  $(-5, 0, 0)$ ， $(0, 3, 4)$  兩點，則此球面方程式為\_\_\_\_\_。

■：設球心  $Q(a, 0, 0)$ ， $P(-5, 0, 0)$ ， $R(0, 3, 4)$

由半徑為  $\overline{QP}=\overline{QR}$

$$\Rightarrow \sqrt{(a+5)^2+0+0}=\sqrt{a^2+3^2+4^2} \Rightarrow a=0$$

因此球心  $Q(0, 0, 0)$ ，半徑  $\overline{QR}=5$

$\therefore$  球面方程式為  $x^2+y^2+z^2=25$

### 例題 6

討論下列方程式所表示的圖形：

(1)  $x^2+y^2+z^2+2x-4y+6z+14=0$ 。

(2)  $x^2+y^2+z^2-6x-2y+4z-7=0$ 。

(3)  $x^2+y^2+z^2+x+y+z+5=0$ 。

■：(1)  $(x+1)^2+(y-2)^2+(z+3)^2=1+4+9-14=0$  表一點

(2)  $(x-3)^2+(y-1)^2+(z+2)^2=9+1+4+7=21>0$  表一球

(3)  $(x+\frac{1}{2})^2+(y+\frac{1}{2})^2+(z+\frac{1}{2})^2=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}-5<0$  圖形為  $\emptyset$

### 例題 7

設  $k$  是實數，且方程式  $x^2+y^2+z^2+2kx+9=0$  的圖形是一球面，則  $k$  的範圍為\_\_\_\_\_。

■：  $(x^2+2kx+k^2)+y^2+z^2=k^2-9$  表一球面

$$k^2-9>0 \Rightarrow (k+3)(k-3)>0 \quad \therefore k>3 \text{ 或 } k<-3$$

### 例題 8

坐標空間中，求直線  $L: \frac{x+1}{1} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z+2}{-1}$  被球面  $S: x^2+y^2+z^2=6$  所截出的線段長。

■：〔代數觀點〕

直線  $L$  的參數式為  $x=t-1, y=-2t-1, z=-t-2, t$  是實數

設  $P(t-1, -2t-1, -t-2)$  是直線  $L$  與球面  $S$  的一交點

$$\text{則 } (t-1)^2 + (-2t-1)^2 + (-t-2)^2 = 6$$

$$\text{整理爲 } 6t^2 + 6t = 0 \Leftrightarrow 6t(t+1) = 0, \text{ 解爲 } t=0 \text{ 或 } t=-1$$

得出兩交點是  $(-1, -1, -2)$  與  $(-2, 1, -1)$

$$\text{所求弦長是 } \sqrt{(-1+2)^2 + (-1-1)^2 + (-2+1)^2} = \sqrt{1+4+1} = \sqrt{6}$$

〔幾何觀點〕

直線  $L$  的參數式為  $x=t-1, y=-2t-1, z=-t-2, t$  是實數

設  $P(t-1, -2t-1, -t-2)$  是  $L$  上的點

球面  $S$  的球心是  $Q(0, 0, 0)$

$$\overline{QP}^2 = (t-1)^2 + (-2t-1)^2 + (-t-2)^2 = 6t^2 + 6t + 6 = 6\left(t + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{9}{2}$$

當  $t = -\frac{1}{2}$  時， $\overline{QP}$  的最小值是  $\frac{3}{2}\sqrt{2}$ ，這也是圓心到  $L$  的距離

$$\text{故弦長是 } 2\sqrt{(\sqrt{6})^2 - \left(\frac{3}{2}\sqrt{2}\right)^2} = 2\sqrt{6 - \frac{18}{4}} = \sqrt{6}$$

### 例題 9

球面  $S: x^2+y^2+z^2+2x+6z+k=0$ ，直線  $L: \frac{x+2}{2} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-3}{1}$ ，若  $L$  與  $S$  相切，

則切點坐標為 \_\_\_\_\_， $k =$  \_\_\_\_\_。

■：球面  $S: (x+1)^2 + y^2 + (z+3)^2 = 10 - k$

球心  $Q(-1, 0, -3)$  在  $L$  之垂足即切點

設切點  $P(2t-2, t+2, t+3)$  則  $\overrightarrow{QP} = (2t-1, t+2, t+6) \perp (2, 1, 1)$

$$\Leftrightarrow 4t-2+t+2+t+6=0 \Leftrightarrow t=-1, \text{ 故切點 } P(-4, 1, 2)$$

將  $P(-4, 1, 2)$  代入  $S \Leftrightarrow k = -25$

### 例題 10

坐標空間中，兩點  $A, B$  的坐標分別是  $(1, -1, 2)$ ， $(5, 4, 3)$ ，求滿足

$\overline{PA} : \overline{PB} = 1 : 2$  的點  $P$  所形成的圖形方程式為 \_\_\_\_\_。

■：設  $P(x, y, z)$

$$\text{已知 } \overline{PA} : \overline{PB} = 1 : 2 \Leftrightarrow \overline{PA}^2 : \overline{PB}^2 = 1 : 4 \Leftrightarrow 4\overline{PA}^2 = \overline{PB}^2$$

$$\Leftrightarrow 4[(x-1)^2 + (y+1)^2 + (z-2)^2] = (x-5)^2 + (y-4)^2 + (z-3)^2$$

$$\Leftrightarrow 4(x^2 - 2x + 1) + 4(y^2 + 2y + 1) + 4(z^2 - 4z + 4)$$

$$= (x^2 - 10x + 25) + (y^2 - 8y + 16) + (z^2 - 6z + 9)$$

$$\therefore 3x^2 + 3y^2 + 3z^2 + 2x + 16y - 10z - 26 = 0 \text{ 表示為球面的方程式}$$

### 例題 11

坐標空間中，球面  $S$  的方程式為  $x^2 + y^2 + z^2 + 2x + 4y - 6z - 2 = 0$ ，點  $P$  是球面上的點，則  $P$  到  $A(3, 0, -1)$  的最短距離為\_\_\_\_\_及最長距離為\_\_\_\_\_。

■： $S: (x+1)^2 + (y+2)^2 + (z-3)^2 = 4^2$

球心  $Q(-1, -2, 3)$ ，半徑  $r=4$

$$\overline{QA} = \sqrt{(3+1)^2 + (0+2)^2 + (-1-3)^2} = 6$$

$$\overline{PA} \text{ 最短距離為 } \overline{AQ} - r = 6 - 4 = 2$$

$$\overline{PA} \text{ 最長距離為 } \overline{AQ} + r = 6 + 4 = 10$$

