3-2 圓與直線的關係

例題 1

設 k 是實數，已知直線 $L：2x+y+k=0$ 與圓 $C：x^2+y^2-2x+6y+5=0$ 相切，則 k 的值為________。

■：$C：(x-1)^2+(y+3)^2=5$，半徑 $r=\sqrt{5}$，圓心 $O(1,-3)$

L 與 C 相切 $\Rightarrow \dfrac{|2\cdot 1+1\cdot(-3)+k|}{\sqrt{2^2+1^2}}=\sqrt{5} \Rightarrow |k-1|=5 \quad \therefore k=-4$ 或 6

例題 2

就實數 m 的範圍討論直線 $L：y=mx+\sqrt{3}$ 與圓 $C：x^2+y^2=1$ 的相交情形。

■：令 $L：mx-y+\sqrt{3}=0$，圓 $C：x^2+y^2=1$，圓心 $O(0,0)$，半徑 $r=1$，

$d(O,L)=\dfrac{|0-0+\sqrt{3}|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}}=\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{m^2+1}}$

(1) L 與 C 有兩交點 $\Rightarrow d(O,L)<1 \Rightarrow \dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{m^2+1}}<1 \Rightarrow m^2+1^2>3 \Rightarrow m^2>2$

$\Rightarrow m>\sqrt{2}$ 或 $m<-\sqrt{2}$

(2) L 與 C 相切 $\Rightarrow d(O,L)=1 \Rightarrow \dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{m^2+1}}=1 \Rightarrow m^2+1=3 \Rightarrow m=\pm\sqrt{2}$

(3) L 與 C 不相交 $\Rightarrow d(O,L)>1 \Rightarrow \dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{m^2+1}}>1 \Rightarrow m^2+1<3 \Rightarrow -\sqrt{2}<m<\sqrt{2}$

例題 3

已知直線 $L：y=mx+2$ 與圓 $C：(x-2)^2+(y+1)^2=4$；若 L 與 C 有相異兩交點，則 m 的範圍是________。

■：$(x-2)^2+(mx+3)^2=4 \Rightarrow (m^2+1)x^2+(6m-4)x+9=0$

$\Rightarrow (6m-4)^2-36(m^2+1)>0 \Rightarrow -48m-20>0$

$\therefore m<-\dfrac{5}{12}$

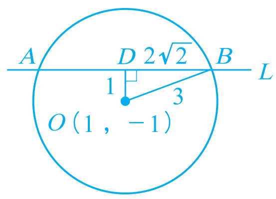
例題 4

求直線 $L：3x-4y-2=0$ 被圓 $C：x^2+y^2-2x+2y-7=0$ 所截出的線段長為________。

■：$C：(x-1)^2+(y+1)^2=3^2$，圓心 $O(1,-1)$，半徑 $r=3$

$d(O,L)=\dfrac{|3\cdot 1-4\cdot(-1)-2|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}}=\dfrac{5}{5}=1=\overline{OD}$

$\overline{BD}=\sqrt{3^2-1^2}=2\sqrt{2} \quad \therefore \overline{AB}=2\cdot 2\sqrt{2}=4\sqrt{2}$

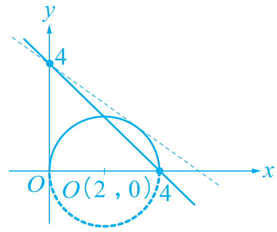


例題 5

若方程式 $\sqrt{x(4-x)}=mx+4$ 有相異二實根，則 m 的範圍為________。

■：$y=\sqrt{x(4-x)}\geq 0$ ⇨ $y^2=4-(x-2)^2$

$\therefore (x-2)^2+y^2=4$，其圖形爲半圓



L：$y=mx+4$ 爲通過（0，4）之直線，兩圖形有相異交點

L 與半圓相切時，$m=-\dfrac{3}{4}$；L 通過（4，0）時，$m=-1$

故 $-1\leq m<-\dfrac{3}{4}$

例題 6【已知切點求切線】

若直線 $y=ax+b$ 切圓 C：$x^2+y^2+2x+4y+k=0$ 於點（2，1），則序組 $(a,b,k)=$ ________。

■：點（2，1）代入直線得 $2a+b=1$ ....①

代入圓 C 得 $2^2+1^2+2\cdot 2+4\cdot 1+k=0$ ⇨ $k+13=0$..............②

而過（2，1）之切線：$2x+y+2\cdot\dfrac{x+2}{2}+4\cdot\dfrac{y+1}{2}+k=0$

即 $3x+3y+k+4=0$，整理得 $y=-x-\dfrac{k+4}{3}$ 與 $y=ax+b$ 同義

比較各項得 $a=-1$ ....③

$b=-\dfrac{k+4}{3}$ ....④

由①、②、③、④解出序組 $(a,b,k)=(-1,3,-13)$

例題 7【過圓外一點求切線】

求過點 $P(1,-5)$ 對圓 C：$x^2+y^2+4x-2y-4=0$ 所作之切線方程式為________。

■：圓 C：$(x+2)^2+(y-1)^2=9$，圓心 $O(-2,1)$，半徑 $r=3$

$P(1,-5)$ 代入圓 C：$3^2+6^2>9$，因此 P 在圓外

設切線 L：$y+5=m(x-1)$ ⇨ $mx-y-m-5=0$

則 $d(O,L)=r$ ⇨ $\dfrac{|-2m-1-m-5|}{\sqrt{m^2+1}}=3$ ⇨ $m=-\dfrac{3}{4}$

因此一切線爲 $y+5=-\dfrac{3}{4}(x-1)$，另一切線爲鉛直線 $x=1$

故所求切線方程式爲 $3x+4y=-17$ 或 $x=1$

例題 8【已知斜率求切線】

斜率為 2 與圓 $C：x^2+y^2+2x-6y+5=0$ 相切且過第二象限的直線，其方程式為＿＿。

■：$x^2+y^2+2x-6y+5=0$

⇨ $(x+1)^2+(y-3)^2=5$，圓心 $O(-1,3)$，半徑 $r=\sqrt{5}$

設切線 $L：y=2x+k$，由 $d(O,L)=r$

得 $\dfrac{|-2-3+k|}{\sqrt{4+1}}=\sqrt{5}$ ⇨ $k=0$ 或 10

(1) $k=0$ 時，$y=2x$ 不過第二象限，不合

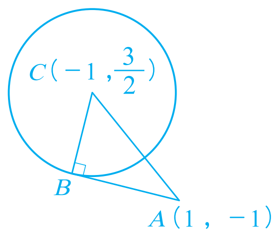
(2) $k=10$ 時，$y=2x+10$ 為所求切線　∴其方程式為 $y=2x+10$

例題 9

自 $(1,-1)$ 向 $2x^2+2y^2+4x-6y-1=0$ 所作的切線段長為＿＿＿＿＿。

■：

$2x^2+2y^2+4x-6y-1=0$ ⇨ $x^2+y^2+2x-3y-\dfrac{1}{2}=0$



⇨ $(x+1)^2+(y-\dfrac{3}{2})^2=\dfrac{15}{4}$

$\therefore C(-1,\dfrac{3}{2})$，$r=\dfrac{\sqrt{15}}{2}=\overline{BC}$

則 $\overline{AB}^2=\overline{AC}^2-\overline{BC}^2$

⇨ $\overline{AB}^2=[(1+1)^2+(-1-\dfrac{3}{2})^2]-(\dfrac{\sqrt{15}}{2})^2=\dfrac{26}{4}$　$\therefore \overline{AB}=\dfrac{\sqrt{26}}{2}$

〈另解〉$2x^2+2y^2+4x-6y-1=0$ ⇨ $x^2+y^2+2x-3y-\dfrac{1}{2}=0$

切線長 $\overline{AB}=\sqrt{1^2+(-1)^2+2\cdot 1-3(-1)-\dfrac{1}{2}}=\sqrt{\dfrac{13}{2}}=\dfrac{\sqrt{26}}{2}$

例題 10

$C_1：x^2+y^2=4$，$C_2：(x-3)^2+(y+4)^2=k$，若 C_1 與 C_2 交於一點，則 $k=$＿＿＿＿＿。

■：$C_1：x^2+y^2=4$，圓心 $O_1(0,0)$，半徑 $r_1=2$

$C_2：(x-3)^2+(y+4)^2=k$，圓心 $O_2(3,-4)$，半徑 $r_2=\sqrt{k}$

C_1 與 C_2 交於一點，表 C_1，C_2 外切或內切

⇨ $\overline{O_1O_2}=r_1+r_2=5$ 或 $\overline{O_1O_2}=|r_1-r_2|=5$ ⇨ $r_2=3$ 或 7　$\therefore k=9$ 或 49

⇨ $5=2+\sqrt{k}$ 或 $5=\sqrt{k}-2$ 即 $k=9$ 或 49

(1) 外切時，$\overline{O_1O_2}=r_1+r_2=5$ ⇨ $2+r_2=5$ ⇨ $r_2=3$ ⇨ $\sqrt{k}=3$　$\therefore k=9$

(2) 內切時，$\overline{O_1O_2}=|r_1-r_2|=5$ ⇨ $|2-\sqrt{k}|=5$ ⇨ $\sqrt{k}=7$　$\therefore k=49$

故 $k=9$ 或 49

例題 11

兩圓 C_1：$x^2+y^2-6x-2y+1=0$，C_2：$x^2+y^2+4x+3=0$，試求下列各式：

(1)兩圓的外公切線段長為________；(2)兩圓的內公切線段長為________；

(3)兩圓的外公切線的交點為________；(4)兩條內公切線的交點為________；

(5)兩圓的外公切線夾角為 2θ，$\tan 2\theta=$________。

■：C_1：$(x-3)^2+(y-1)^2=9$，$O_1(3,1)$，$r_1=3$

C_2：$(x+2)^2+y^2=1$，$O_2(-2,0)$，$r_2=1$

則 $\overline{O_1O_2}=\sqrt{(3+2)^2+(1-0)^2}=\sqrt{26}>r_1+r_2=4$

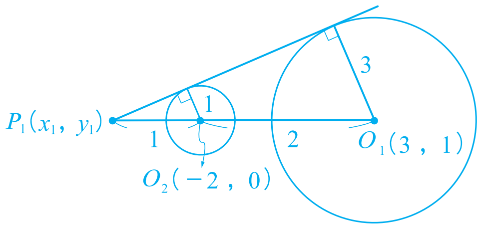
故兩圓外離

(1) 外公切線為 $\sqrt{\overline{O_1O_2}^2-(r_1-r_2)^2}=\sqrt{22}$

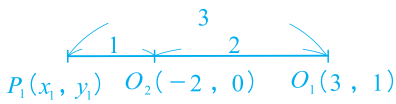
(2) 內公切線為 $\sqrt{\overline{O_1O_2}^2-(r_1+r_2)^2}=\sqrt{10}$

(3) 設 $P_1(x_1,y_1)$ 為外公切線之交點

利用分點公式



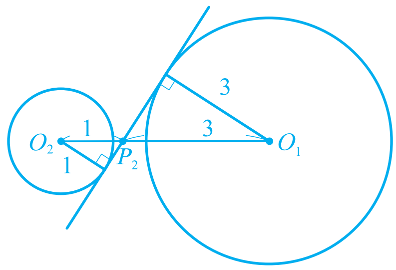
⇨ $(-2,0)=\dfrac{1}{3}(3,1)+\dfrac{2}{3}(x_1,y_1)$



⇨ $(x_1,y_1)=\left(-\dfrac{9}{2},-\dfrac{1}{2}\right)$

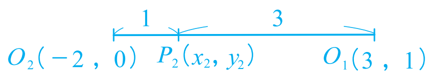
(4) 設 $P_2(x_2,y_2)$ 為內公切線之交點

利用分點公式



⇨ $(x_2,y_2)=\dfrac{1}{4}(3,1)+\dfrac{3}{4}(-2,0)$

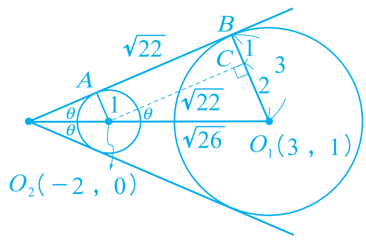
⇨ $(x_2,y_2)=\left(-\dfrac{3}{4},\dfrac{1}{4}\right)$



(5) $\because \overline{O_1O_2}=\sqrt{26}$，$r_1-r_2=3-1=2$

$\overline{O_2C}=\overline{AB}=\sqrt{22}$

$\therefore \tan\theta=\dfrac{2}{\sqrt{22}}$



$$\tan 2\theta=\frac{2\cdot\dfrac{2}{\sqrt{22}}}{1-\left(\dfrac{2}{\sqrt{22}}\right)^2}=\frac{2\sqrt{22}}{9}$$