3-1 圓的方程式

【圓的標準式】

例題 1

設圓 C：$2x^2+2y^2-4x+8y+2=0$ 的圓心坐標（a，b），半徑 r，則 $a+b+r=$________。

■：圓 C：$2x^2+2y^2-4x+8y+2=0$ ⇨ $x^2+y^2-2x+4y+1=0$

配方得 $(x-1)^2+(y+2)^2=4$

∴圓心（a，b）＝（1，-2），半徑 $r=\sqrt{4}=2$ ⇨ $a+b+r=1+(-2)+2=1$

【圓的一般式】

例題 2

A（0，2），B（1，1），C（1，-1）三點，求△ABC 的

(1) 外接圓方程式為________。　　(2) 外心坐標為________。

■：(1) 令圓方程式：$x^2+y^2+dx+ey+f=0$，將 A（0，2），B（1，1），C（1，-1）

代入得 $\begin{cases} 4+2e+f=0 \\ 2+d+e+f=0 \\ 2+d-e+f=0 \end{cases}$ ⇨ $\begin{cases} d=2 \\ e=0 \\ f=-4 \end{cases}$　∴外接圓方程式：$x^2+y^2+2x-4=0$

(2) $x^2+y^2+2x-4=0$ ⇨ $(x+1)^2+y^2=5$ ∴外心爲（-1，0）

例題 3

圓 C：$x^2+y^2-4x+2y+a=0$，半徑為 2，圓心在直線 $y=bx+3$上，則數對（a，b）＝

________。

■：圓 C：$(x-2)^2+(y+1)^2=5-a$，半徑 $\sqrt{5-a}=2$ ⇨ $a=1$

圓心（2，-1）代入直線得 $-1=2b+3$ ⇨ $b=-2$，故數對（a，b）＝（1，-2）

【直徑式】

例題 4

A（1，2），C（5，-2），以 $\overline{AC}$ 為直徑的圓方程式為________。

■：$(x-1)(x-5)+(y-2)(y+2)=0$

⇨ $x^2-6x+5+y^2-4=0$　∴圓方程式爲 $x^2+y^2-6x+1=0$

【圓的參數式】

例題 5

若 P 為單位圓：$x^2+y^2=1$ 上的任一點，令 O 為原點，Q（3，-2），則△POQ 的最大面積為________。

■：令 $P(\cos\theta, \sin\theta)$

$$\therefore \triangle POQ \text{ 面積爲 } \frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ 3 & -2 \end{vmatrix}\right| = \frac{1}{2}\left|-2\cos\theta - 3\sin\theta\right|$$

$$= \frac{1}{2}\left|2\cos\theta + 3\sin\theta\right|$$

$$-\sqrt{2^2+3^2} \le 2\cos\theta + 3\sin\theta \le \sqrt{2^2+3^2}$$

$\therefore -\sqrt{13} \le 2\cos\theta + 3\sin\theta \le \sqrt{13}$ $\therefore$ 最大面積爲 $\frac{\sqrt{13}}{2}$

例題 6

判斷下列二元二次方程式所表示的圖形：(1) $3x^2+3y^2-12x+24y+33=0$；(2) $x^2+y^2+6x-8y+25=0$；(3) $x^2+y^2+2x-4y+6=0$。

■：(1) 方程式同除以 3，得出方程式爲 $x^2+y^2-4x+8y+11=0$

分別對 x，y 配方得出 $(x-2)^2+(y+4)^2=9$

方程式的圖形是一圓，圓心在 $(2, -4)$，半徑是 3

(2) 方程式經配方得出 $(x+3)^2+(y-4)^2=0$

方程式的圖形是一點 $(-3, 4)$

(3) 方程式經配方得出 $(x+1)^2+(y-2)^2=-1$

方程式的圖形是空集合 $\varnothing$

例題 7

下列所述情形，何者恰可決定一圓？

(A) 方程式 $x^2+y^2+6x+10y+30=0$ 所代表的圖形

(B) 方程式 $y=\sqrt{16-x^2}$ 所代表的圖形

(C) 過三點 $(1, -4)$，$(-2, -10)$，$(2, -2)$

(D) 滿足 $\begin{cases} x=2+3\sin\theta \\ y=-1+3\cos\theta \end{cases}$，$0 \le \theta < 2\pi$ 的所有點 $P(x, y)$ 所形成的圖形

(E) 圓心在直線 $x=y$ 上，半徑為 5 且與 y 軸相切

■：(A) $x^2+y^2+6x+10y+30=0 \Rightarrow (x+3)^2+(y+5)^2=4$ 圓心 $(-3, -5)$，半徑 2

(B) $y=\sqrt{16-x^2} \ge 0 \Rightarrow x^2+y^2=16$，$y \ge 0$ 爲上半圓

(C) $A(1, -4)$，$B(-2, -10)$，$C(2, -2)$，則

$\overrightarrow{AB}=(-3, -6)$，$\overrightarrow{AC}=(1, 2)$

$\because \overrightarrow{AB}=-3\overrightarrow{AC}$ $\therefore \overrightarrow{AB} \,/\!/\, \overrightarrow{AC}$，即 A，B，C 共線

(D) $\begin{cases} x=2+3\sin\theta \\ y=-1+3\cos\theta \end{cases}$，$0\leq\theta<2\pi$

⇨ $(x-2)^2+(y+1)^2=9$ 爲圓心 $(2,-1)$，半徑 3 的圓

(E) 設圓心 (t,t) 與 y 軸距離 $|t|=5$ ⇨ $t=\pm5$

可決定兩圓，圓心分別爲 $(5,5)$ 及 $(-5,-5)$　　故選(A)(D)

例題 8

求由 L_1：$x+3y=4$，L_2：$y=1$，L_3：$x-y=4$ 所圍成三角形的外接圓方程式為________。

■：解 $\begin{cases} x+3y=4 \\ y=1 \end{cases}$ 得 $A(1,1)$，

$\begin{cases} x+3y=4 \\ x-y=4 \end{cases}$ 得 $B(4,0)$，

$\begin{cases} y=1 \\ x-y=4 \end{cases}$ 得 $C(5,1)$

設外接圓 $x^2+y^2+dx+ey+f=0$ 過 A，B，C三點，則

$\begin{cases} 2+d+e+f=0 \\ 16+4d+f=0 \\ 26+5d+e+f=0 \end{cases}$ ⇨ $\begin{cases} d=-6 \\ e=-4 \\ f=8 \end{cases}$，外接圓方程式爲 $x^2+y^2-6x-4y+8=0$

例題 9【阿波羅隆尼斯圓】

在坐標平面上，已知兩個定點 $A(3,5)$，$B(-10,4)$，設 $P(x,y)$ 為動點且知 $\overline{PA}:\overline{PB}=2:3$，則動點 $P(x,y)$ 的軌跡方程式為________。

（必須寫成 $ax^2+bxy+cy^2+dx+ey+k=0$ 的形式）

■：$3\overline{PA}=2\overline{PB}\Leftrightarrow 3\sqrt{(x-3)^2+(y-5)^2}=2\sqrt{(x+10)^2+(y-4)^2}$

$\Leftrightarrow 9(x^2+y^2-6x-10y+34)=4(x^2+y^2+20x-8y+116)$

$\Leftrightarrow 5x^2+5y^2-134x-58y-158=0$

例題 10

求過點 $A(5,-2)$ 且與直線 $3x-y-1=0$ 相切於點 $P(1,2)$ 的圓方程式為________。

■：與 $3x-y-1=0$ 垂直且過 P 的直線爲 L：$x+3y-7=0$

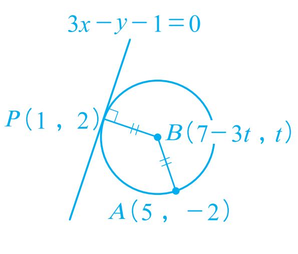
圓心在 L 上，設圓心 $B(7-3t,t)$

則半徑 $r=\overline{AB}=\overline{BP}$

⇨ $(7-3t-5)^2+(t+2)^2=(7-3t-1)^2+(t-2)^2$

⇨ $t=1$　∴圓心 $B(4,1)$，$r=\overline{AB}=\sqrt{1^2+3^2}=\sqrt{10}$

圓方程式爲 $(x-4)^2+(y-1)^2=10$



例題 11

若圓 C 通過點（4，2）及點（1，−5），且其圓心在直線 $x-3y-7=0$ 上，則 C 之圓心為________，半徑為________。

■：圓心（$3k+7$，k）到（4，2）與（1，−5）等距離

⇨ $r=\sqrt{(3k+3)^2+(k-2)^2}=\sqrt{(3k+6)^2+(k+5)^2}$

⇨ $18k-4k+9+4=36k+10k+36+25$ ⇨ $32k=-48$

$\therefore k=\dfrac{-3}{2}$，圓心（$\dfrac{5}{2}$，$\dfrac{-3}{2}$），半徑為 $\sqrt{\dfrac{9}{4}+\dfrac{49}{4}}=\dfrac{\sqrt{58}}{2}$