2-5 空間中的直線方程式

例題 1

將下列各直線以參數式表示：(1) L_1：$\dfrac{x-5}{2}=\dfrac{y}{4}=\dfrac{z+3}{-1}$；(2) L_2：$\begin{cases}2x-y+3z-4=0\\x+4y-2z+7=0\end{cases}$。

解：

(1) 直線參數式爲 $\begin{cases}x=5+2t\\y=4t\\z=-3-t\end{cases}$，$t\in\mathbb{R}$

(2) 方向比爲 $\begin{vmatrix}-1&3\\4&-2\end{vmatrix}:\begin{vmatrix}3&2\\-2&1\end{vmatrix}:\begin{vmatrix}2&-1\\1&4\end{vmatrix}=-10:7:9$

令 $z=9t$ 代回得 $\begin{cases}2x-y+27t-4=0\\x+4y-18t+7=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=1-10t\\y=-2+7t\end{cases}$

∴直線參數式爲 $\begin{cases}x=1-10t\\y=-2+7t\\z=9t\end{cases}$，$t\in\mathbb{R}$

例題 2

設 $P(5,0,-1)$，$Q(3,1,7)$，下列何者是 $\overleftrightarrow{PQ}$ 的方程式？

(A) $\begin{cases}x=5+2t\\y=t\\z=-1-8t\end{cases}$，$t\in\mathbb{R}$ (B) $\begin{cases}x=3-2t\\y=1-t\\z=7+8t\end{cases}$，$t\in\mathbb{R}$ (C) $\begin{cases}x=1+4t\\y=2-2t\\z=15-16t\end{cases}$，$t\in\mathbb{R}$

(D) $\dfrac{x-2}{2}=\dfrac{y-1}{-1}=\dfrac{z-3}{-8}$ (E) $\dfrac{x+3}{-6}=\dfrac{y-4}{3}=\dfrac{z-31}{24}$。

解：

已知 $\overrightarrow{PQ}=(-2,1,8)$ ∴$\overleftrightarrow{PQ}$：$\begin{cases}x=5-2s\\y=s\\z=-1+8s\end{cases}$，$s\in\mathbb{R}$

(A) 方向比爲 $2:1:-8\neq-2:1:8$（不合）

(B) 方向比爲 $-2:-1:8\neq-2:1:8$（不合）

(C) 令 $s=2-2t$ 代入 $\overleftrightarrow{PQ}$：$\begin{cases}x=5-2s\\y=s\\z=-1+8s\end{cases}$，$s\in\mathbb{R}\Rightarrow\begin{cases}x=1+4t\\y=2-2t\\z=15-16t\end{cases}$，$t\in\mathbb{R}$（合）

(D) 方向比爲 $2:-1:-8\neq-2:1:8$（不合）

(E) $\dfrac{x+3}{-6}=\dfrac{y-4}{3}=\dfrac{z-31}{24}=t\Rightarrow\begin{cases}x=-3-6t\\y=4+3t\\z=31+24t\end{cases}$，$t\in\mathbb{R}$

令 $t=\dfrac{s-4}{3}$ 代入 ⇨ $\begin{cases} x=5-2s \\ y=s \\ z=-1+8s \end{cases}$，$s\in\mathbb{R}$ 與 $\overleftrightarrow{PQ}$ 同

故選(C)(E)

例題 3

求過點（2，−1，3）且與直線 L：$\begin{cases} x+y+z=1 \\ 2x-y+3z=2 \end{cases}$ 平行的直線方程式為________．

解：直線 L：$\begin{cases} x+y+z=1 \\ 2x-y+3z=2 \end{cases}$ 其方向比爲 $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix}:\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}:\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}=4:-1:-3$

∴過點（2，−1，3）與直線 L 平行的直線方程式爲 $\dfrac{x-2}{4}=\dfrac{y+1}{-1}=\dfrac{z-3}{-3}$

例題 4

L_1：$\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y}{-1}=\dfrac{z+3}{3}$，$L_2$：$\dfrac{x+1}{-4}=\dfrac{y-3}{2}=\dfrac{z}{-6}$，試求包含 L_1，L_2 的平面方程式為________．

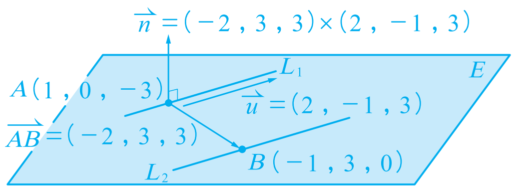
解：L_1：$\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y}{-1}=\dfrac{z+3}{3}$，$L_2$：$\dfrac{x+1}{2}=\dfrac{y-3}{-1}=\dfrac{z}{3}$，因此 $L_1 \,//\, L_2$

在 L_1 上取 A（1，0，−3），L_2 上取 B（−1，3，0），則 $\overrightarrow{AB}=$（−2，3，3）

（−2，3，3）×（2，−1，3）＝（3，3，−1）

取平面法向量（3，3，−1），方程式爲 $3(x-1)+3(y-0)-(z+3)=0$

即 $3x+3y-z=6$



例題 5

設點 P（1，−2，3），直線 L：$\dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y+1}{2}=\dfrac{z+3}{2}$，試求：

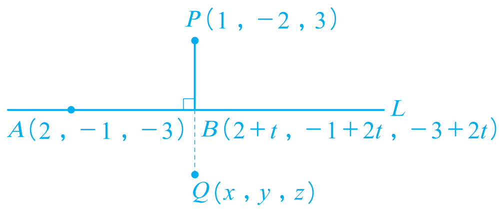
(1) P 在直線 L 上的投影點坐標為________．

(2) P 對於直線 L 的對稱點坐標為________．

(3) P 點到直線 L 的距離為________．

解：(1) 設 B 爲 P 在直線 L 上的投影點

$\because B \in L$，$B:\begin{cases} x=2+t \\ y=-1+2t，t\in\mathbb{R} \\ z=-3+2t \end{cases}$



$\overrightarrow{PB}=(1+t，1+2t，-6+2t)$

又 L 之方向向量 $\vec{u}=(1，2，2)$

$\therefore$ 利用 $\overrightarrow{PB}\perp\vec{u}\Rightarrow(1+t)\cdot 1+(1+2t)\cdot 2+(-6+2t)\cdot 2=0$

$\Rightarrow t=1$　$\therefore B$ 坐標為 $(3，1，-1)$

(2) 設 P 對於直線 L 的對稱點為 $Q(x，y，z)$

利用 B 為 P，Q 之中點，即 $\dfrac{x+1}{2}=3$，$\dfrac{y-2}{2}=1$，$\dfrac{z+3}{2}=-1$

$\therefore x=5$，$y=4$，$z=-5$　$\therefore Q(5，4，-5)$

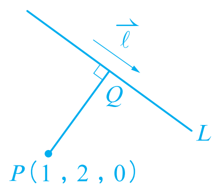
(3) 由(1)知 $B=(3，1，-1)$　$\therefore P$ 到直線 L 的距離為 $\overline{PB}$

$\therefore\overline{PB}=\sqrt{(3-1)^2+(1+2)^2+(-1-3)^2}=\sqrt{4+9+16}=\sqrt{29}$

例題 6

$P(1，2，0)$ 到直線 $L:\dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y+2}{2}=\dfrac{z-10}{-2}$ 的最近距離是________。

解：設 $\overline{PQ}\perp L$ 於 $Q(t+2，2t-2，-2t+10)$



$\overrightarrow{PQ}=(t+1，2t-4，-2t+10)$

由 $\overrightarrow{PQ}\perp\vec{\ell}=(1，2，-2)$

得 $(t+1)+2(2t-4)-2(-2t+10)=0$，即 $t=3$

因此 $\overrightarrow{PQ}=(4，2，4)$，最短距離 $\overline{PQ}=6$

例題 7

兩平行線 $L_1:\dfrac{x-3}{1}=\dfrac{y}{-1}=\dfrac{z+2}{-2}$，$L_2:\dfrac{x-9}{2}=\dfrac{y+2}{-2}=\dfrac{z+1}{-4}$，則：

(1) 包含 L_1 與 L_2 的平面方程式為________。

(2) 兩平行線 L_1 與 L_2 的距離為________。

解：(1) 在 L_1 上取點 $P_1(3，0，-2)$，L_2 上取點 $P_2(9，-2，-1)$

則平面的法向量 $\vec{n}\perp(1，-1，-2)$ 且 $\vec{n}\perp\overrightarrow{P_1P_2}=(6，-2，1)$

$\Rightarrow\vec{n}\,/\!/\left(\begin{vmatrix}-1 & -2\\ -2 & 1\end{vmatrix}，\begin{vmatrix}-2 & 1\\ 1 & 6\end{vmatrix}，\begin{vmatrix}1 & -1\\ 6 & -2\end{vmatrix}\right)$

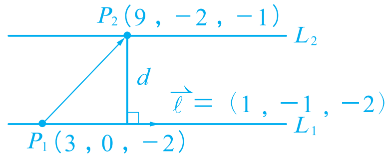
$=(-5，-13，4)\,/\!/\,(5，13，-4)$

$\therefore$ 平面方程式 E 可令為 $5x+13y-4z+k=0$

代入 $P_1(3，0，-2)$ 得 $E:5x+13y-4z-23=0$

(2) $\vec{\ell}=(1，-1，-2)$，$\overrightarrow{P_1P_2}=(6，-2，1)$

$$d(L_1, L_2)=\frac{|\vec{\ell}\times\overrightarrow{P_1P_2}|}{|\vec{\ell}|}=\frac{\sqrt{(-5)^2+(-13)^2+4^2}}{\sqrt{1^2+(-1)^2+(-2)^2}}=\frac{\sqrt{210}}{\sqrt{6}}=\sqrt{35}$$

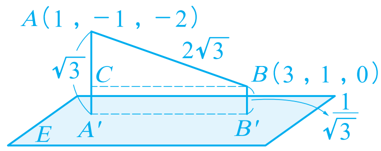


例題 8

$A(1, -1, -2)$，$B(3, 1, 0)$，求 $\overline{AB}$ 在平面 E：$x-y-z=1$ 上的投影長。

解：方法一：先做 A，B 在平面 E 的投影點 A'，B'，

再做 $\overline{BC}\perp\overline{AA'}$



$$\overline{AA'}=d(A, E)=\frac{|1+1+2-1|}{\sqrt{1^2+(-1)^2+(-1)^2}}=\sqrt{3}$$

$$\overline{BB'}=d(B, E)=\frac{|3-1-0-1|}{\sqrt{1^2+(-1)^2+(-1)^2}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\overline{AC}=\overline{AA'}-\overline{A'C}=\overline{AA'}-\overline{BB'}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$$

利用畢氏定理得 $\overline{BC}=\sqrt{\overline{AB}^2-\overline{AC}^2}=\sqrt{12-\frac{4}{3}}=\frac{4\sqrt{6}}{3}$

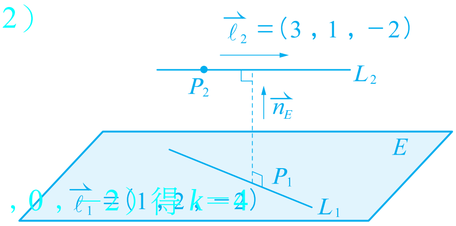
例題 9

空間中兩歪斜線 L_1：$\frac{x-3}{1}=\frac{y}{2}=\frac{z+2}{-2}$，$L_2$：$\frac{x}{3}=\frac{y-2}{1}=\frac{z+1}{-2}$，

(1)若平面 E 包含 L_1 且與 L_2 不相交，則平面 E 的方程式為何？(2) L_1 與 L_2 距離為何？

解：$L_1\subset E$，$L_2 // E$，$\vec{\ell_1}$ 爲 L_1 之方向向量，$\vec{\ell_2}$ 爲 L_2 之方向向量

$\therefore \vec{n_E}\perp\vec{\ell_1}=(1, 2, -2)$，$\vec{n_E}\perp\vec{\ell_2}=(3, 1, -2)$



因此 $\vec{n_E} // \left(\begin{vmatrix}2 & -2\\1 & -2\end{vmatrix}, \begin{vmatrix}-2 & 1\\-2 & 3\end{vmatrix}, \begin{vmatrix}1 & 2\\3 & 1\end{vmatrix}\right)$

$=(-2, -4, -5) // (2, 4, 5)$

(1) 令 E：$2x+4y+5z+k=0$ 代入 L_1 上點 $P_1(3, 0, -2)$ 得 $k=4$

故 E：$2x+4y+5z+4=0$

(2) 在 L_2 上取一點 $P_2(0, 2, -1)$，則

$$d(L_1, L_2)=d(L_2, E)=d(P_2, E)=\frac{|2\cdot 0+4\cdot 2+5(-1)+4|}{\sqrt{2^2+4^2+5^2}}=\frac{7\sqrt{5}}{15}$$

例題 10

兩直線 L_1：$\dfrac{x-5}{3}=\dfrac{y+7}{-6}=\dfrac{z-1}{-2}$，$L_2$：$\dfrac{x-1}{3}=\dfrac{y}{2}=\dfrac{z+5}{2}$，若 $P\in L_1$，$Q\in L_2$ 且 $\overline{PQ}$ 為 L_1，L_2 的公垂線段，則：

(1)垂足 P 點坐標為______；(2)垂足 Q 點坐標為______；(3) L_1 與 L_2 間的距離為____。

解：設 P 點坐標 $(5+3t_1,\ -7-6t_1,\ 1-2t_1)$，$Q$ 點坐標 $(1+3t_2,\ 2t_2,\ -5+2t_2)$

故 $\overrightarrow{PQ}=(-3t_1+3t_2-4,\ 6t_1+2t_2+7,\ 2t_1+2t_2-6)$

由 $\overrightarrow{PQ}\perp\overrightarrow{L_1}$ 得 $(-3t_1+3t_2-4,\ 6t_1+2t_2+7,\ 2t_1+2t_2-6)\cdot(3,\ -6,\ -2)=0$

整理得 $-49t_1-7t_2-42=0 \Rightarrow 7t_1+t_2=-6$

由 $\overrightarrow{PQ}\perp\overrightarrow{L_2}$ 得 $(-3t_1+3t_2-4,\ 6t_1+2t_2+7,\ 2t_1+2t_2-6)\cdot(3,\ 2,\ 2)=0$

整理得 $7t_1+17t_2-10=0$

因此 $\begin{cases}7t_1+t_2=-6\\ 7t_1+17t_2=10\end{cases}$，解聯立得 $t_1=-1$，$t_2=1$ 代回 P，Q 坐標

所以 $P(2,\ -1,\ 3)$，$Q(4,\ 2,\ -3)$，L_1 與 L_2 間的距離爲 $\overline{PQ}=\sqrt{2^2+3^2+6^2}=7$

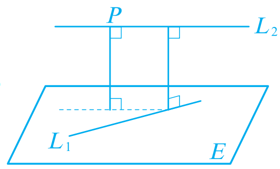
例題 11

兩歪斜線 L_1：$\begin{cases}x+y+5=0\\ 3y+2z+7=0\end{cases}$ 與 L_2：$\begin{cases}2x+2y+z-11=0\\ x+4y+z-16=0\end{cases}$ 之公垂線段長為________。

解：設包含 L_1 且平行 L_2 之平面爲 E：$k(x+y+5)+(3y+2z+7)=0$，

其法向量 $\overrightarrow{n}=(k,\ k+3,\ 2)$

L_2 之方向比爲 $\begin{vmatrix}2&1\\4&1\end{vmatrix}:\begin{vmatrix}1&2\\1&1\end{vmatrix}:\begin{vmatrix}2&2\\1&4\end{vmatrix}=(-2):(-1):6$



取 $\overrightarrow{\ell_2}=(-2,\ -1,\ 6)$，由 $\overrightarrow{n}\cdot\overrightarrow{\ell_2}=0$

得 $-2k-k-3+12=0$，即 $k=3$　　所以 E：$3x+6y+2z+22=0$

在 L_2 上任取一點 $P(1,\ 3,\ 3)$，則

$(L_1,\ L_2$ 距離$)=(P$ 與平面 E 距離$)=\dfrac{|3+18+6+22|}{\sqrt{3^2+6^2+2^2}}=\dfrac{49}{7}=7$