2-4 平面方程式

【一般式】

例題 1

過點（2，−2，1）且平行於 $3x+y+z-2=0$ 的平面方程式為________。

解：平行於 $3x+y+z-2=0$ 之平面 E 可設為 $3x+y+z=k$

將（2，−2，1）代入得 $k=5$　　$\therefore E：3x+y+z=5$

【截距式】

例題 2

通過點（1，3，5）且在三坐標軸之截距比為 1：3：5 之平面方程式為________。

解：

設三軸截距各為 r，$3r$，$5r$，則平面方程式為 $\dfrac{x}{r}+\dfrac{y}{3r}+\dfrac{z}{5r}=1$

過點（1，3，5）代入平面得 $\dfrac{1}{r}+\dfrac{3}{3r}+\dfrac{5}{5r}=1 \Rightarrow r=3$

故所求為 $\dfrac{x}{3}+\dfrac{y}{9}+\dfrac{z}{15}=1$

例題 3

過 A（2，4，−1），B（3，1，0），C（3，2，−4）三點的平面方程式為________。

解：$\overrightarrow{AB}=$（1，−3，1），$\overrightarrow{AC}=$（1，−2，−3）

利用外積法

$$\vec{n}=\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\left(\begin{vmatrix}-3 & 1\\ -2 & -3\end{vmatrix}:\begin{vmatrix}1 & 1\\ -3 & 1\end{vmatrix}:\begin{vmatrix}1 & -3\\ 1 & -2\end{vmatrix}\right)=(11,4,1)$$

令 $E：11x+4y+z=d$，將 A（2，4，−1）代入得 $11x+4y+z=37$

【外積式】

例題 4

過點（2，−2，1）且與兩平面 $3x+y+z-2=0$，$x-2y+z+4=0$ 均垂直的平面方程式為________。

解：取法向量 $\vec{n}=$（3，1，1）×（1，−2，1）＝（3，−2，−7），

又過（2，−2，1）

$\Rightarrow$ 方程式為 $3(x-2)-2(y+2)-7(z-1)=0$，即 $3x-2y-7z=3$

【平面族】

例題 5

包含兩平面 $3x+y-z+1=0$ 及 $x+y+z=0$ 之交線且與平面 $2x-y+3z-1=0$ 垂直的平面方程式為________。

解：設所求平面 E：$(3x+y-z+1)+k(x+y+z)=0$

其法向量 $\vec{n}=(3+k,1+k,-1+k)$

因 E 與平面 $2x-y+3z-1=0$ 垂直，故 $(3+k,1+k,-1+k)\cdot(2,-1,3)=0$

得 $k=-\frac{1}{2}$ 代回 E：$(3x+y-z+1)-\frac{1}{2}(x+y+z)=0$

整理得 $5x+y-3z+2=0$

例題 6

點 $A(2,0,3)$，$B(0,2,1)$，平面 E：$2x-y+2z=4$，

(1) A，B 在 E 之________側。（填同、異）

(2) 若 $\overleftrightarrow{AB}$ 交 E 於 P，則 $\overline{PA}:\overline{PB}=$________。

(3) P 點坐標為________。

(4) 線段 AB 在平面 E 的投影長度為________。

解：(1) 將 $A(2,0,3)$ 代入 E：$2x-y+2z-4=0$ 中 ⇨ $2\cdot2-0+2\cdot3-4>0$

$B(0,2,1)$ 代入 E：$2x-y+2z-4=0$ 中 ⇨ $2\cdot0-2+2\cdot1-4<0$，

A，B 在 E 之異側

(2) $\overline{PA}:\overline{PB}=d(A,E):d(B,E)$

$$=\frac{|2\cdot2-0+2\cdot3-4|}{\sqrt{2^2+(-1)^2+2^2}}:\frac{|2\cdot0-2+2\cdot1-4|}{\sqrt{2^2+(-1)^2+2^2}}=6:4=3:2$$

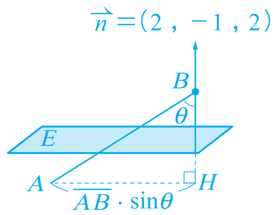
(3) $P\in\overleftrightarrow{AB}$ ⇨ $P:\begin{cases}x=2-2t\\y=0+2t\\z=3-2t\end{cases}$，$t\in R$ 代入 E：$2x-y+2z=4$

⇨ $2(2-2t)-(2t)+2(3-2t)=4$ $\therefore t=\frac{3}{5}$ $\therefore P\left(\frac{4}{5},\frac{6}{5},\frac{9}{5}\right)$

(4) $\cos\theta=\dfrac{\overrightarrow{AB}\cdot\vec{n}}{|\overrightarrow{AB}||\vec{n}|}=-\dfrac{5}{3\sqrt{3}}$

$\sin\theta=\sqrt{1^2-\cos^2\theta}=\dfrac{\sqrt{2}}{3\sqrt{3}}$

$\therefore \overline{AB}\cdot\sin\theta=\sqrt{12}\cdot\dfrac{\sqrt{2}}{3\sqrt{3}}=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$



例題 7

試求兩平面 E：$3x-2y-6z-13=0$，F：$3x-2y-6z+15=0$ 的距離為________。

解：$d(E,F)=\dfrac{|-13-15|}{\sqrt{3^2+(-2)^2+(-6)^2}}=\dfrac{28}{\sqrt{49}}=4$

例題 8

兩相異平面 E_1：$x-y+z-3=0$，E_2：$x+y+\sqrt{6}z=0$ 的夾角為________。

解：$\overrightarrow{n_1}=(1,-1,1)$，$\overrightarrow{n_2}=(1,1,\sqrt{6})$

$\cos\theta=\pm\dfrac{1-1+\sqrt{6}}{\sqrt{1^2+(-1)^2+1^2}\sqrt{1^2+1^2+(\sqrt{6})^2}}=\pm\dfrac{\sqrt{6}}{\sqrt{24}}=\pm\dfrac{1}{2}$，$\therefore\theta=\dfrac{\pi}{3}$ 或 $\dfrac{2\pi}{3}$

例題 9

已知空間中四點 $A(0,1,1)$，$B(-3,-2,-2)$，$C(-1,2,1)$，$D(1,3,4)$，若平面 ABD 與平面 ACD 的夾角為 θ，則 $\sin\theta=$________。

解：$\overrightarrow{AB}=(-3,-3,-3)$，$\overrightarrow{AC}=(-1,1,0)$，$\overrightarrow{AD}=(1,2,3)$

平面 ABD 之法向量 $\overrightarrow{n_1}=\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AD}=(-3,6,-3)$，

平面 ACD 之法向量 $\overrightarrow{n_2}=\overrightarrow{AC}\times\overrightarrow{AD}=(3,3,-3)$

$\cos\theta=\pm\dfrac{\overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{n_2}}{|\overrightarrow{n_1}||\overrightarrow{n_2}|}=\pm\dfrac{\sqrt{2}}{3}\Rightarrow\sin\theta=\sqrt{1-\cos^2\theta}=\dfrac{\sqrt{7}}{3}$