2-3 空間向量的坐標表示法

例題 1

$A(1,13,2)$，$B(5,0,10)$，$C(-1,3,4)$，O 為原點，試求：

(1) $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=$________。 (2) $3\overrightarrow{AB}-4\overrightarrow{AC}=$________。

(3) $ABCD$ 為平行四邊形，求 D 點坐標為________。

解：(1) $\overrightarrow{OA}=(1,13,2)$，$\overrightarrow{OB}=(5,0,10)$，$\overrightarrow{OC}=(-1,3,4)$

$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=(1+5-1,13+0+3,2+10+4)=(5,16,16)$

(2) $3\overrightarrow{AB}=3(5-1,0-13,10-2)=(12,-39,24)$

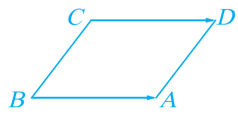
$-4\overrightarrow{AC}=-4(-1-1,3-13,4-2)=(8,40,-8)$

$3\overrightarrow{AB}-4\overrightarrow{AC}=3\overrightarrow{AB}+(-4\overrightarrow{AC})=(12+8,-39+40,24-8)=(20,1,16)$

(3) 令 $D(x,y,z)$，利用 $\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{BA}$

$\Rightarrow (x+1,y-3,z-4)=(-4,13,-8)$

$\therefore x=-5$，$y=16$，$z=-4 \Rightarrow D(-5,16,-4)$



例題 2

空間中，$A(4,1,13)$，$B(-1,6,5)$，

(1) $P\in\overline{AB}$，$\overline{AP}:\overline{AB}=2:3$，求 P 坐標為________。

(2) $P\in\overleftrightarrow{AB}$，$\overline{AP}:\overline{BP}=3:1$，求 P 坐標為________。

解：(1) 如圖(一)，利用分點公式得

$$P\left(\frac{1\cdot 4+2\cdot(-1)}{1+2},\frac{1\cdot 1+2\cdot 6}{1+2},\frac{1\cdot 13+2\cdot 5}{1+2}\right)=\left(\frac{2}{3},\frac{13}{3},\frac{23}{3}\right)$$

(2) $P\in\overleftrightarrow{AB}$

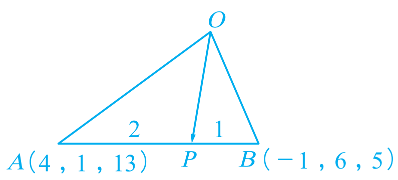
① 若 P 在 $\overline{AB}$ 上，如圖(二)，利用內分點公式得

$$P\left(\frac{1\cdot 4+3(-1)}{3+1},\frac{1\cdot 1+3\cdot 6}{3+1},\frac{1\cdot 13+3\cdot 5}{3+1}\right)=\left(\frac{1}{4},\frac{19}{4},7\right)$$

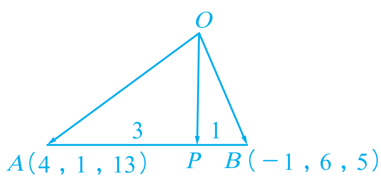
② 若 P 在 B 之外側，如圖(三)，利用外分點公式得

$$P\left(\frac{(-1)\cdot 4+3\cdot(-1)}{3-1},\frac{(-1)\cdot 1+3\cdot 6}{3-1},\frac{(-1)\cdot 13+3\cdot 5}{3-1}\right)$$

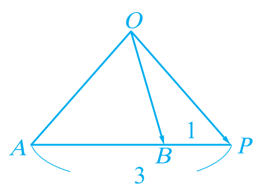
$$=\left(-\frac{7}{2},\frac{17}{2},1\right)$$



圖(一)



圖(二)



圖(三)

例題 3

空間中，$A(1,3,-2)$，$B(3,1,-1)$，$C(5,3,1)$，試求：

(1) $\angle BAC$ 的內角平分線交 $\overline{BC}$ 於 D，則 D 點坐標為為________。

(2) $\angle BAC$ 的外角平分線交 $\overleftrightarrow{BC}$ 於 E，則 E 點坐標為為________。

解：(1) $\overline{AB}=\sqrt{(3-1)^2+(1-3)^2+[-1-(-2)]^2}=3$

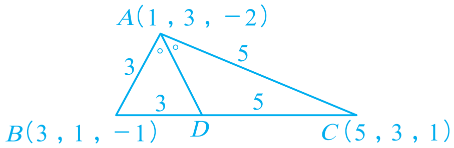
$\overline{AC}=\sqrt{(5-1)^2+(3-3)^2+[1-(-2)]^2}=5$

$\because \overline{AD}$ 平分 $\angle BAC$

$\Rightarrow \overline{BD}:\overline{CD}=\overline{AB}:\overline{AC}=3:5 \Rightarrow \overrightarrow{OD}=\dfrac{5\overrightarrow{OB}+3\overrightarrow{OC}}{3+5}$

$\therefore D$ 爲 $\left(\dfrac{5\cdot 3+3\cdot 5}{3+5},\dfrac{5\cdot 1+3\cdot 3}{3+5},\dfrac{5\cdot(-1)+3\cdot 1}{3+5}\right)$

$=\left(\dfrac{30}{8},\dfrac{14}{8},\dfrac{-2}{8}\right)=\left(\dfrac{15}{4},\dfrac{7}{4},-\dfrac{1}{4}\right)$

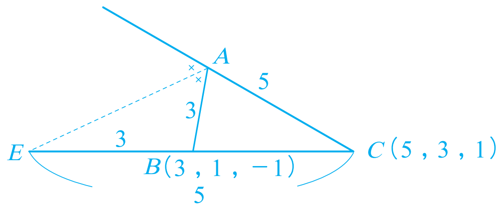


(2) 令 $\overline{AE}$ 平分 $\angle BAC$ 之外角

$\Rightarrow \overline{BE}:\overline{CE}=\overline{AB}:\overline{AC}=3:5 \Rightarrow \overrightarrow{OE}=\dfrac{5\overrightarrow{OB}-3\overrightarrow{OC}}{5-3}$

E 爲 $\left(\dfrac{5\cdot 3-3\cdot 5}{5-3},\dfrac{5\cdot 1-3\cdot 3}{5-3},\dfrac{5\cdot(-1)-3\cdot 1}{5-3}\right)$

$=\left(\dfrac{0}{2},\dfrac{-4}{2},\dfrac{-8}{2}\right)=(0,-2,-4)$



例題 4

$\vec{a}=(1,0,1)$，$\vec{b}=(-1,2,1)$，則：

(1) $\vec{a}\cdot\vec{b}=$________。

(2) $(2\vec{a}-\vec{b})\cdot(\vec{a}+\vec{b})=$________。

解：(1) $\vec{a}\cdot\vec{b}=1\cdot(-1)+0\cdot 2+1\cdot 1=0$

(2) $2\vec{a}-\vec{b}=2(1,0,1)-(-1,2,1)=(3,-2,1)$

$\vec{a}+\vec{b}=(0,2,2)$

$(2\vec{a}-\vec{b})\cdot(\vec{a}+\vec{b})=3\cdot 0+(-2)\cdot 2+1\cdot 2=-2$

例題 5

在空間中有一三角形 ABC，$A(2,-3,4)$，$B(3,-4,4)$，$C(2,-2,3)$，試求 $\angle A=$________。

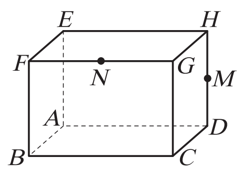
解：$\overrightarrow{AB}=(1,-1,0)$，$\overrightarrow{AC}=(0,1,-1)$

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=|\overrightarrow{AB}|\cdot|\overrightarrow{AC}|\cdot\cos A$ ⇨ $-1=\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}\cdot\cos A$

⇨ $\cos A=-\dfrac{1}{2}$ ⇨ $\angle A=\dfrac{2\pi}{3}$

例題 6

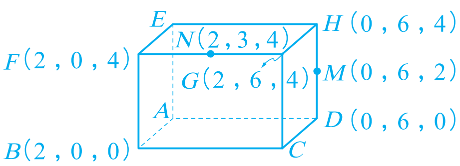
如右圖，長方體 $ABCD-EFGH$ 的長、寬、高分別為 $\overline{AB}=2$，$\overline{AD}=6$，$\overline{AE}=4$，若 M 為 $\overline{DH}$ 的中點，N 為 $\overline{FG}$ 的中點，則 $\overrightarrow{AN}\cdot\overrightarrow{BM}=$________。



解：建立坐標系 $A(0,0,0)$，$B(2,0,0)$，

$M(0,6,2)$，$N(2,3,4)$

則 $\overrightarrow{AN}\cdot\overrightarrow{BM}=(2,3,4)\cdot(-2,6,2)=-4+18+8=22$



例題 7

若 a，b 為實數，則 $a^2+b^2+(2a-b-12)^2$ 的最小值為________。

解：由柯西不等式知

$[a^2+b^2+(2a-b-12)^2][(-2)^2+1^2+1^2]\geq(-2a+b+2a-b-12)^2$

即 $[a^2+b^2+(2a-b-6)^2]\cdot 6\geq 144$ ⇨ $a^2+b^2+(2a-b-6)^2\geq 24$

∴最小值爲 24

例題 8

若 $x+2y+z=4$，試求 $x^2+y^2+z^2-4x+2z$ 之最小值為________。

解：$x^2+y^2+z^2-4x+2z=(x-2)^2+y^2+(z+1)^2-5$

$[(x-2)^2+y^2+(z+1)^2]\cdot[1^2+2^2+1^2]\geq(x-2+2y+z+1)^2$

$\Rightarrow [(x-2)^2+y^2+(z+1)^2]\cdot 6\geq(x+2y+z-1)^2=9$

$\Rightarrow (x-2)+y^2+(z+1)^2\geq\dfrac{3}{2}$

$\therefore$最小值爲 $\dfrac{3}{2}-5=-\dfrac{7}{2}$

例題 9

空間中三點 $P(6,-4,4)$，$Q(2,1,2)$，$R(3,-1,4)$，試求：

(1) $\overrightarrow{QP}$ 在 $\overrightarrow{QR}$ 上之正射影為________。

(2) $\overrightarrow{QP}$ 在 $\overrightarrow{QR}$ 上之正射影長為________。

(3) P 在 $\overleftrightarrow{QR}$ 上之正射影點坐標________。

(4) P 點到直線 QR 的距離為________。

解：

(1) $\dfrac{\overrightarrow{QP}\cdot\overrightarrow{QR}}{|\overrightarrow{QR}|^2}\cdot\overrightarrow{QR}=\dfrac{(4,-5,2)\cdot(1,-2,2)}{9}\cdot(1,-2,2)=(2,-4,4)$

(2) $\left|\dfrac{\overrightarrow{QP}\cdot\overrightarrow{QR}}{|\overrightarrow{QR}|}\right|=\left|\dfrac{(4,-5,2)\cdot(1,-2,2)}{3}\right|=\dfrac{4+10+4}{3}=6$

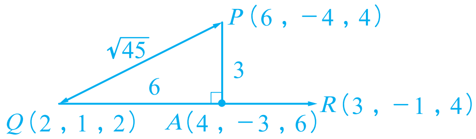
(3) 由(1)知 $\overrightarrow{QP}$ 在 $\overrightarrow{QR}$ 上的正射影 $\overrightarrow{QA}=(2,-4,4)$

設 $A(x,y,z)$，$\overrightarrow{QA}=(x-2,y-1,z-2)=(2,-4,4)$

$\therefore A(x,y,z)=(4,-3,6)$

(4) P 到 $\overleftrightarrow{QR}$ 的距離爲

$\overline{PA}=\sqrt{(6-4)^2+(-4+3)^2+(4-6)^2}=3$



例題 10

空間中三點 $A(-1,-2,7)$，$B(2,4,1)$，$C(14,-2,13)$

(1) $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=$________。

(2) $\triangle ABC$ 面積為________。

(3) A 到 $\overleftrightarrow{BC}$ 的距離為________。

(4) 若 H 為 $\triangle ABC$ 之垂心，則 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AH}=$________。

解：(1) $\overrightarrow{AB}=(3,6,-6)$，$\overrightarrow{AC}=(15,0,6)\Rightarrow\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=(36,-108,-90)$

(2) $\triangle ABC=\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right|=\frac{1}{2}\left|18(2,-6,-5)\right|=9\sqrt{65}$

(3) $\overrightarrow{BC}=(12,-6,12)$，$\overline{BC}=\sqrt{12^2+(-6)^2+12^2}=\sqrt{324}=18$

$d(A,\overleftrightarrow{BC})=\frac{2\triangle ABC}{18}=\frac{2\cdot 9\sqrt{65}}{18}=\sqrt{65}$

(4) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AH}=\overrightarrow{AB}\cdot(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CH})=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CH}=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=45-36=9$

（由 $\overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{CH}$ 知 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CH}=0$）