2-2 空間坐標系

例題 1

在空間中，點 P 為（3，4，5），試求：

(1) 點 P 在 xy 平面的投影點坐標為________。

(2) 點 P 在 x 軸上的投影點坐標為________。

(3) 點 P 在 yz 平面的對稱點坐標為________。

解：(1) 令 $z=0$，點 P 在 xy 平面的投影點坐標爲（3，4，0）

(2) 點 P 在 x 軸上的投影點爲（3，0，0）

(3) 點 P 在 yz 平面的對稱點爲（-3，4，5）

例題 2

完成下列表格：設 P（a，b，c）為空間中一點

	正射影坐標	對稱點坐標	與 P 點的距離
x 軸	（a，0，0）	（a，$-b$，$-c$）	$\sqrt{b^2+c^2}$
y 軸	（0，b，0）	（$-a$，b，$-c$）	$\sqrt{a^2+c^2}$
z 軸	（0，0，c）	（$-a$，$-b$，c）	$\sqrt{a^2+b^2}$
原點	（0，0，0）	（$-a$，$-b$，$-c$）	$\sqrt{a^2+b^2+c^2}$
xy 平面	（a，b，0）	（a，b，$-c$）	$\lvert c \rvert$
yz 平面	（0，b，c）	（$-a$，b，c）	$\lvert a \rvert$
zx 平面	（a，0，c）	（a，$-b$，c）	$\lvert b \rvert$

例題 3

若點 P 到 x 軸的距離為 5，且 P 在 xy 平面的投影點為（2，-3，0），則 P 點坐標為________。

解：P 在 xy 平面投影點爲（2，-3，0）

$\therefore P$（2，-3，c），P 在 x 軸垂足爲 H（2，0，0）

由 $\overline{PH}=\sqrt{9+c^2}=5$ 得 $c=\pm4$，故 P（2，-3，±4）

例題 4

A 為空間直角坐標系中第一卦限的點，若 A 到 xy 平面的距離為 4，到 z 軸距離為 $\sqrt{74}$，到 y 軸距離為 $\sqrt{41}$，則 A 點坐標為________。

解：設 $A(a, b, c)$，$a>0$，$b>0$，$c>0$

$$\text{依題意：}\begin{cases} c=4 \cdots\cdots\cdots\cdots ① \\ \sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{74} \cdots\cdots\cdots\cdots ② \\ \sqrt{a^2+c^2}=\sqrt{41} \cdots\cdots\cdots\cdots ③ \end{cases}$$

將①代入③得 $a=5$，代入②得 $b=7$ $\therefore A$ 點坐標爲 $(5, 7, 4)$

例題 5

設 P 為空間直角坐標系中第一卦限的點，且與三坐標軸距離相等，若 P 到 xy 平面距離為 $\sqrt{2}$，則 P 到原點距離為________。

解：$\because P$ 到 xy 平面距離爲 $\sqrt{2}$，且 P 在第一卦限

可設 P 爲 $(a, b, \sqrt{2})$，$a>0$，$b>0$，又 P 到三坐標距離相等

⇨ $a^2+b^2=b^2+(\sqrt{2})^2=a^2+(\sqrt{2})^2$ $\therefore a=b=\sqrt{2}$

P 到原點的距離爲 $\sqrt{a^2+b^2+(\sqrt{2})^2}=\sqrt{(\sqrt{2})^2+(\sqrt{2})^2+(\sqrt{2})^2}=\sqrt{6}$