1-4　平面向量的內積

例題 1

$\vec{u}=(1,-1)$，$\vec{v}=(2,1)$，則：

(1) $\vec{u}\cdot\vec{v}=$________。　　(2) $|\vec{u}+t\vec{v}|$ 有最小值時，$t=$________。

■：(1) $\vec{u}\cdot\vec{v}=1\cdot2+(-1)\cdot1=1$

(2) $|\vec{u}+t\vec{v}|^2=(1+2t)^2+(-1+t)^2=1+4t+4t^2+1-2t+t^2=5t^2+2t+2$

$$=5\left[t^2+\frac{2}{5}t+\left(\frac{1}{5}\right)^2\right]-\frac{1}{5}+2=5\left(t+\frac{1}{5}\right)^2+\frac{9}{5}\geq\frac{9}{5}$$

當 $t=-\frac{1}{5}$ 時，$|\vec{u}+t\vec{v}|$ 有最小值 $\frac{3}{\sqrt{5}}$

例題 2

x，$y\in\mathbb{R}$，$x^2+y^2=52$，則：

(1) $2x+3y+1$ 的範圍為________。

(2) 發生最大值時的數對 $(x,y)=$________；發生最小值時的數對 $(x,y)=$____。

■：(1) 令 $\vec{u}=(x,y)$，$\vec{v}=(2,3)$ ⇨ $|\vec{u}|^2=x^2+y^2$，$|\vec{v}|^2=13$，$\vec{u}\cdot\vec{v}=2x+3y$

由柯西不等式得 $(x^2+y^2)\cdot13\geq(2x+3y)^2$ ⇨ $-26\leq2x+3y\leq26$

$\therefore -25\leq2x+3y+1\leq27$

(2) 當 $\vec{u}\,//\,\vec{v}$，$\frac{x}{2}=\frac{y}{3}=t$，將 $x=2t$，$y=3t$ 代入 $x^2+y^2=52$ 得 $t=\pm2$

令 $t=2$ 時，$x=4$，$y=6$ ⇨ $2x+3y+1$ 有最大值 27

令 $t=-2$ 時，$x=-4$，$y=-6$ ⇨ $2x+3y+1$ 有最小值 -25

例題 3

(1) 設 x，y 為正數，且 $2x+3y=14$，當數對 $(x,y)=$________時，$\frac{8}{x}+\frac{3}{y}$ 有最小值為________。

(2) 設 x，y 為正數，且 $x+2y=8$，當數對 $(x,y)=$________時，$\frac{9}{x}+\frac{2}{y}$ 有最小值為

________．

■：(1) $\because x>0$，$y>0$，令 $\vec{u}=(\sqrt{2x},\sqrt{3y})$，$\vec{v}=\left(\dfrac{2\sqrt{2}}{\sqrt{x}},\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{y}}\right)$

$|\vec{u}|^2=2x+3y$，$|\vec{v}|^2=\dfrac{8}{x}+\dfrac{3}{y}$

$(2x+3y)\left(\dfrac{8}{x}+\dfrac{3}{y}\right)\geq\left(\sqrt{2x}\cdot\dfrac{2\sqrt{2}}{\sqrt{x}}+\sqrt{3y}\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{y}}\right)^2$

⇨ $(2x+3y)\left(\dfrac{8}{x}+\dfrac{3}{y}\right)\geq(4+3)^2=49$ ⇨ $\left(\dfrac{8}{x}+\dfrac{3}{y}\right)\geq\dfrac{49}{14}=\dfrac{7}{2}$

$\therefore \dfrac{8}{x}+\dfrac{3}{y}$ 有最小值 $\dfrac{7}{2}$，此時 $\dfrac{\sqrt{2x}}{\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{x}}}=\dfrac{\sqrt{3y}}{\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{y}}}=t$ ⇨ $\dfrac{x}{2}=\dfrac{y}{1}=t$

$x=2t$，$y=t$ 代入 $2x+3y=14$　$\therefore t=2$ ⇨ 數對 $(x,y)=(4,2)$

(2) $\because x>0$，$y>0$，令 $\vec{u}=(\sqrt{x},\sqrt{2y})$，$\vec{v}=\left(\dfrac{3}{\sqrt{x}},\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{y}}\right)$

⇨ $|\vec{u}|^2=x+2y$，$|\vec{v}|^2=\dfrac{9}{x}+\dfrac{2}{y}$

$(x+2y)\left(\dfrac{9}{x}+\dfrac{2}{y}\right)\geq(3+2)^2$ ⇨ $\dfrac{9}{x}+\dfrac{2}{y}\geq\dfrac{25}{8}$

當 $\vec{u}\,/\!/\,\vec{v}$ 時，$\dfrac{9}{x}+\dfrac{2}{y}$ 有最小值 $\dfrac{25}{8}$，此時 $\dfrac{\sqrt{x}}{\frac{3}{\sqrt{x}}}=\dfrac{\sqrt{2y}}{\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{y}}}$

⇨ $\dfrac{x}{3}=\dfrac{y}{1}=t$ 代入 $x+2y=8$ 得 $t=\dfrac{8}{5}$　$\therefore$ 數對 $(x,y)=\left(\dfrac{24}{5},\dfrac{8}{5}\right)$

例題 4

設 $\vec{a}=(x,y)$，已知 $|\vec{a}|=\sqrt{13}$，則當 $5x+y$ 有最大值時，$\vec{a}=$________．

■：$\vec{a}=(x,y)$ ⇨ $|\vec{a}|^2=x^2+y^2=13$

由 $(x^2+y^2)(5^2+1^2)\geq(5x+y)^2$ 得 $(5x+y)^2\leq 13\times 26$ ⇨ $-13\sqrt{2}\leq 5x+y\leq 13\sqrt{2}$

當 $\dfrac{x}{5}=\dfrac{y}{1}$ 時，$5x+y$ 有最大值 $13\sqrt{2}$，$x=5y$ 代入 $5x+y=13\sqrt{2}$ 得 $25y+y=13\sqrt{2}$

$y=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，$x=\dfrac{5\sqrt{2}}{2}$，即 $\vec{a}=(x,y)=\left(\dfrac{5\sqrt{2}}{2},\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$

例題 5

x，y 為實數，$x^2+y^2+2x=4$，求 $x-2y$ 之最小值為________．

■：$x^2+y^2+2x=4$ ⇨ $(x+1)^2+y^2=5$

由柯西不等式〔$(x+1)^2+y^2$〕〔$1^2+(-2)^2$〕$\geq (x+1-2y)^2$

$\therefore -5\leq x-2y+1\leq 5$ ⇨ $-6\leq x-2y\leq 4$，故最小值爲-6

例題 6

$\triangle ABC$ 中，$\overline{AB}=5$，$\overline{BC}=7$，$\overline{AC}=8$，則：

(1) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=$________．(2) $\triangle ABC$ 的面積為________．

■：

(1) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\overline{AB}\cdot\overline{AC}\cdot\cos A=\overline{AB}\cdot\overline{AC}\cdot\dfrac{\overline{AB}^2+\overline{AC}^2-\overline{BC}^2}{2\overline{AB}\cdot\overline{AC}}=\dfrac{5^2+8^2-7^2}{2}=20$

(2) $\triangle ABC$ 面積爲 $\dfrac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{AB}|^2\cdot|\overrightarrow{AC}|^2-(\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC})^2}=\dfrac{1}{2}\sqrt{5^2\cdot 8^2-20^2}=10\sqrt{3}$

例題 7

設$\triangle ABC$ 的三頂點為 $A(3,-2)$，$B(-1,-4)$，$C(6,-3)$，則：

(1) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=$________．

(2) $\angle A=$________．

(3) $\triangle ABC$ 的面積為________．

(4) A 到 $\overline{BC}$ 的距離為________．

■：(1) $\overrightarrow{AB}=(-4,-2)$，$\overrightarrow{AC}=(3,-1)$

⇨ $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=(-4)(3)+(-2)(-1)=-12+2=-10$

(2) $|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{(-4)^2+(-2)^2}=\sqrt{20}$，$|\overrightarrow{AC}|=\sqrt{3^2+(-1)^2}=\sqrt{10}$

$\cos A=\dfrac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AC}|}=\dfrac{-10}{\sqrt{20}\sqrt{10}}=-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ $\quad\therefore\angle A=\dfrac{3\pi}{4}$

(3) $\triangle ABC=\dfrac{1}{2}\begin{vmatrix}-4 & -2\\ 3 & -1\end{vmatrix}=\dfrac{1}{2}(4+6)=5$

(4) $\overline{BC}=\sqrt{(6+1)^2+(-3+4)^2}=\sqrt{50}$

$\therefore A$ 到 $\overline{BC}$ 的距離爲 $\dfrac{2\triangle ABC}{\overline{BC}}=\dfrac{10}{\sqrt{50}}=\sqrt{2}$

例題 8

$\vec{u}=(3,2)$，$\vec{v}=(4,-1)$，

(1) $\vec{u}$ 在 $\vec{v}$ 的正射影為________。

(2) $\vec{v}$ 在 $\vec{u}$ 的正射影為________。

(3) $\vec{u}$ 在 $\vec{v}$ 的正射影長為________。

(4) $\vec{v}$ 在 $\vec{u}$ 的正射影長為________。

■：(1) $\vec{u}\cdot\vec{v}=3\cdot4+2\cdot(-1)=10$

$|\vec{v}|^2=4^2+(-1)^2=17$

$\vec{u}$ 在 $\vec{v}$ 的正射影爲 $\left(\dfrac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{v}|^2}\right)\cdot\vec{v}=\dfrac{10}{17}(4,-1)=\left(\dfrac{40}{17},-\dfrac{10}{17}\right)$

(2) $|\vec{u}|^2=3^2+2^2=13$

$\vec{v}$ 在 $\vec{u}$ 的正射影爲 $\left(\dfrac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{u}|^2}\right)\cdot\vec{u}=\dfrac{10}{13}(3,2)=\left(\dfrac{30}{13},\dfrac{20}{13}\right)$

(3) $\vec{u}$ 在 $\vec{v}$ 的正射影長爲 $\left|\dfrac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{v}|}\right|=\dfrac{10}{\sqrt{17}}$

(4) $\vec{v}$ 在 $\vec{u}$ 的正射影長爲 $\left|\dfrac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{u}|}\right|=\dfrac{10}{\sqrt{13}}$

例題 9

設 $A(a,1)$，$B(2,b)$ 與 $C(3,4)$ 為坐標平面上三點，而 O 為原點。若向量 $\overrightarrow{OA}$ 與 $\overrightarrow{OB}$ 在向量 $\overrightarrow{OC}$ 上的正射影相同，則 a 與 b 滿足的關係式為________。

■：$\vec{u}$ 在 $\vec{v}$ 方向之正射影爲 $\left(\dfrac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{v}|^2}\right)\vec{v}$

由已知可得 $\dfrac{3a+4}{25}(3,4)=\dfrac{6+4b}{25}(3,4)$

$\therefore 3a+4=6+4b$，即 $3a-4b-2=0$

例題 10

兩直線 $2x+3y=4$ 與 $5x-y=7$ 的夾角為 θ，求 $\cos\theta=$________。

■：$\cos\theta=\pm\dfrac{2\cdot 5+3\cdot(-1)}{\sqrt{2^2+3^2}\cdot\sqrt{5^2+(-1)^2}}=\pm\dfrac{7}{\sqrt{13}\cdot\sqrt{26}}=\pm\dfrac{7}{13\cdot\sqrt{2}}=\pm\dfrac{7\sqrt{2}}{26}$

例題 11

求過 $(2,-1)$ 與 $\sqrt{3}x-y=0$ 夾角成 30° 的直線方程式為________。

■：設過 $(2,-1)$ 之直線爲 L_1：$y+1=m(x-2)$ ⇨ L_1：$mx-y-2m-1=0$

而 L_2：$\sqrt{3}x-y=0$，已知兩直線夾角爲 30°

因此 $\cos 30^\circ=\left|\dfrac{\sqrt{3}m+1}{\sqrt{m^2+(-1)^2}\cdot\sqrt{(\sqrt{3})^2+(-1)^2}}\right|$，平方之 $\dfrac{(\sqrt{3}m+1)^2}{(m^2+1)\cdot 4}=\dfrac{3}{4}$

$\therefore 3m^2+3=3m^2+2\sqrt{3}m+1$ ⇨ $2\sqrt{3}m=2$ $\therefore m=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$，另一解爲鉛直線

$\therefore L_1$ 爲 $\dfrac{1}{\sqrt{3}}x-y-\dfrac{2}{\sqrt{3}}-1=0$ 或 $x=2$ ⇨ $x-\sqrt{3}y=2+\sqrt{3}$ 或 $x=2$

例題 12

設直線 L_1 的方程式為 $5x-12y-2=0$，L_2 的方程式為 $4x+3y+11=0$。試求：

(1) L_1 與 L_2 的交點坐標。

(2) L_1 與 L_2 的交角平分線方程式。

■：(1) $\begin{cases}5x-12y-2=0\\4x+3y+11=0\end{cases}$ 得 $x=-2$，$y=-1$ $\therefore$ 交點爲 $(-2,-1)$

(2) $\dfrac{|5x-12y-2|}{13}=\dfrac{|4x+3y+11|}{5}$ ⇨ $\therefore 5(5x-12y-2)=\pm 13(4x+3y+11)$

交角平分線爲 $11x-3y+19=0$ 或 $3x+11y+17=0$

例題 13

兩直線 L_1：$2x-9y+16=0$，L_2：$9x-2y-5=0$ 之銳角平分線的方程式為________。

■：(異號區)L_1，L_2 交角平分線 $\dfrac{2x-9y+16}{\sqrt{4+81}}=-\dfrac{9x-2y-5}{\sqrt{4+81}}$，(L_4：$x-y+1=0$ 爲銳角平分線方程式