1-3　平面向量的坐標表示法

例題 1

$A(-4,1)$，$B(1,4)$，$C(-2,-3)$，$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$，則：(1) D 點坐標為________；

(2) $2\overrightarrow{AB}-3\overrightarrow{BC}=$________；(3) $|\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{BC}|=$________．

■：(1) 設 $D(x,y)$

利用 $\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AB}$ ⇨ $(x+2,y+3)=(1+4,4-1)$　$\therefore x=3$，$y=0$ ⇨ $D(3,0)$

(2) $\because \overrightarrow{AB}=(1+4,4-1)=(5,3)$，$\overrightarrow{BC}=(-2-1,-3-4)=(-3,-7)$

⇨ $2\overrightarrow{AB}-3\overrightarrow{BC}=2(5,3)-3(-3,-7)=(19,27)$

(3) $\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{BC}=(5,3)+2(-3,-7)=(-1,-11)$

⇨ $|\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{BC}|=\sqrt{(-1)^2+(-11)^2}=\sqrt{122}$

例題 2

給定 $\vec{a}=(2,-1)$，$\vec{b}=(1,2)$，把 $\vec{c}=(5,7)$ 表成 $r\vec{a}+s\vec{b}$ 的形式，r，s 是實數．

■：$(5,7)=r(2,-1)+s(1,2)$　$\therefore \begin{cases} 2r+s=5 \\ -r+2s=7 \end{cases}$ ⇨ $r=\dfrac{3}{5}$，$s=\dfrac{19}{5}$

例題 3

給定平面上三向量 $\vec{u}=(1,-1)$，$\vec{v}=(-1,2)$，$\vec{w}=(2,1)$，試求：

(1) $2\vec{u}+3\vec{v}-2\vec{w}=$________．(2) $|2\vec{u}+3\vec{v}-2\vec{w}|=$________．

■：(1) $2\vec{u}+3\vec{v}-2\vec{w}=2(1,-1)+3(-1,2)-2(2,1)$

$=(2-3-4,-2+6-2)=(-5,2)$

(2) $|2\vec{u}+3\vec{v}-2\vec{w}|=\sqrt{(-5)^2+2^2}=\sqrt{29}$

例題 4

梯形 $ABCD$ 中，$\overline{AD}\,//\,\overline{BC}$，已知 $A(1,3)$，$B(-1,2)$，$C(2,-2)$，若 $\overline{AD}=8$，則 D 點坐標為________。

■：

令 $\overrightarrow{AD}=t\overrightarrow{BC}=t(3,-4)$，$t>0$，由 $\overline{AD}=5t=8$ 得 $t=\dfrac{8}{5}$

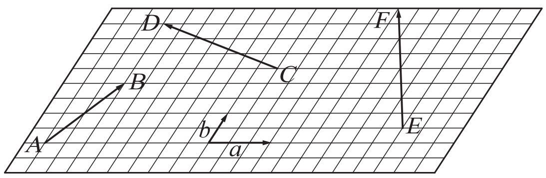
$\therefore \overrightarrow{AD}=\dfrac{8}{5}(3,-4)=(\dfrac{24}{5},-\dfrac{32}{5})$

⇨ $\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AD}=(1,3)+(\dfrac{24}{5},-\dfrac{32}{5})=(\dfrac{29}{5},-\dfrac{17}{5})$

例題 5

下圖為兩組兩兩平行的直線組合，且相鄰兩線等距離，試以 $\vec{a}$ 和 $\vec{b}$ 表下列向量：

(1) $\overrightarrow{AB}=$________；(2) $\overrightarrow{CD}=$________；(3) $\overrightarrow{EF}=$________。



■：令 $\vec{a}=(3,0)$，$\vec{b}=(0,2)$

(1) $\overrightarrow{AB}=(2,4)=\dfrac{2}{3}(3,0)+2(0,2)=\dfrac{2}{3}\vec{a}+2\vec{b}$

(2) $\overrightarrow{CD}=(-7,3)=-\dfrac{7}{3}(3,0)+\dfrac{3}{2}(0,2)=-\dfrac{7}{3}\vec{a}+\dfrac{3}{2}\vec{b}$

(3) $\overrightarrow{EF}=(-4,8)=-\dfrac{4}{3}(3,0)+4(0,2)=-\dfrac{4}{3}\vec{a}+4\vec{b}$

例題 6

已知 $\vec{i}=(1,0)$，$\vec{j}=(0,1)$，令 $\vec{u}=\vec{i}+3\vec{j}$，$\vec{v}=-3\vec{i}+\vec{j}$，計算：

(1) $2\vec{u}+\vec{v}=$________。 (2) $|2\vec{u}+\vec{v}|=$________。

■：$\vec{u}=\vec{i}+3\vec{j}=(1,3)$，$\vec{v}=-3\vec{i}+\vec{j}=(-3,1)$

(1) $2\vec{u}+\vec{v}=(2,6)+(-3,1)=(-1,7)$

(2) $|2\vec{u}+\vec{v}|=\sqrt{(-1)^2+7^2}=\sqrt{50}$

例題 7

兩向量 $\vec{u}$，$\vec{v}$ 滿足方程組 $\begin{cases}\vec{u}+2\vec{v}=(3,-6)\\ 2\vec{u}+\vec{v}=(-9,6)\end{cases}$，求 $3\vec{u}+4\vec{v}=$________。

■：$\begin{cases}2\vec{u}+4\vec{v}=(6,-12)\ \ldots\ldots\ldots\ldots\text{①}\\ 2\vec{u}+\vec{v}=(-9,6)\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\text{②}\end{cases}$

①－②得 $3\vec{v}=(15,-18)$

$\therefore \vec{v}=(5,-6)$ 代入①得 $\vec{u}=(-7,6)$ $\therefore 3\vec{u}+4\vec{v}=(-1,-6)$

例題 8

給定坐標平面上四個點 $A(0,2)$，$B(1,2)$，$C(-2,0)$，$D(-1,-3)$，使 $a\overrightarrow{AC}+b\overrightarrow{AD}=-2\overrightarrow{BC}+3\overrightarrow{BD}$，求數對 $(a,b)=$________。

■：$\overrightarrow{AC}=(-2-0,0-2)=(-2,-2)$，$\overrightarrow{AD}=(-1-0,-3-2)=(-1,-5)$

$\overrightarrow{BC}=(-2-1,0-2)=(-3,-2)$，$\overrightarrow{BD}=(-1-1,-3-2)=(-2,-5)$

$a\overrightarrow{AC}+b\overrightarrow{AD}=-2\overrightarrow{BC}+3\overrightarrow{BD}$

⇨ $a(-2,-2)+b(-1,-5)=-2(-3,-2)+3(-2,-5)$

⇨ $\begin{cases} -2a-b=0\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ① \\ -2a-5b=-11\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ② \end{cases}$ ⇨ ①－②得 $4b=11$

∴$b=\dfrac{11}{4}$ 代入①得 $a=\dfrac{-11}{8}$　　∴數對（a，b）＝（$-\dfrac{11}{8}$，$\dfrac{11}{4}$）

例題 9

在坐標平面上 A（3，2），B（1，5），C（－2，－1），若點 P 滿足

$3\overrightarrow{AP}+2\overrightarrow{BP}+\overrightarrow{CP}=\vec{0}$，求 P 之坐標為________。

■：設 P（x，y）

⇨ $3\overrightarrow{AP}=3$（$x-3$，$y-2$），$2\overrightarrow{BP}=2$（$x-1$，$y-5$），$\overrightarrow{CP}=$（$x+2$，$y+1$）

∵$3\overrightarrow{AP}+2\overrightarrow{BP}+\overrightarrow{CP}=\vec{0}$

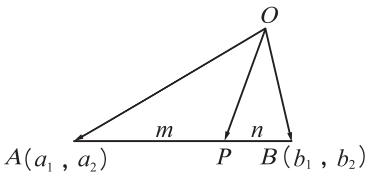
⇨ $\begin{cases} 3(x-3)+2(x-1)+(x+2)=0 \\ 3(y-2)+2(y-5)+(y+1)=0 \end{cases}$ ⇨ $\begin{cases} 6x-9=0 \\ 6y-15=0 \end{cases}$　∴P（x，y）＝（$\dfrac{3}{2}$，$\dfrac{5}{2}$）

例題 10

坐標平面上，相異兩點 A（a_1，a_2），B（b_1，b_2），

設點 P 在線段 AB 上且 $\overline{PA}:\overline{PB}=m:n$，其中

m，n 是正數，試證明 $\overrightarrow{OP}=\left(\dfrac{na_1+mb_1}{m+n},\dfrac{na_2+mb_2}{m+n}\right)$。



■：∵P 在 $\overline{AB}$ 上，$\overline{PA}:\overline{PB}=m:n$

∴$\overline{PA}:\overline{AB}=m:(m+n)$ ⇨ $\overrightarrow{AP}:\overrightarrow{AB}=m:(m+n)$

⇨ $(\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OA}):(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA})=m:(m+n)$

⇨ $m(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA})=(m+n)(\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OA})$ ⇨ $(m+n)\overrightarrow{OP}=n\overrightarrow{OA}+m\overrightarrow{OB}$

⇨ $\overrightarrow{OP}=\dfrac{n\overrightarrow{OA}+m\overrightarrow{OB}}{m+n}=\dfrac{n}{m+n}(a_1,a_2)+\dfrac{m}{m+n}(b_1,b_2)=\left(\dfrac{na_1+mb_1}{m+n},\dfrac{na_2+mb_2}{m+n}\right)$

例題 11

坐標平面上，點 P 是 $A(4,-3)$，$B(-1,2)$ 兩點連線段上的點，且

$\overline{PA}:\overline{PB}=2:3$，求點 P 的坐標。

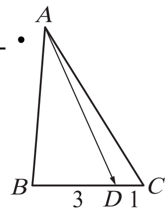
■：點 P 是 $A(4,-3)$，$B(-1,2)$ 兩點連線段上的點，且 $\overline{PA}:\overline{PB}=2:3$

故點 P 的坐標是 $\left(\dfrac{3\cdot 4+2\cdot(-1)}{5},\dfrac{3\cdot(-3)+2\cdot 2}{5}\right)$，即 $(2,-1)$

例題 12

坐標平面上，$\triangle ABC$ 的三頂點坐標為 $A(-1,-2)$，$B(-3,5)$，

$C(2,6)$，點 D 在邊 $\overline{BC}$ 上且 $\overline{DB}:\overline{DC}=3:1$，求 D 的坐標為________。



■：$\overrightarrow{AB}=(-3-(-1),5-(-2))=(-2,7)$

$\overrightarrow{AC}=(2-(-1),6-(-2))=(3,8)$

$\overrightarrow{AD}=\dfrac{1}{3+1}\overrightarrow{AB}+\dfrac{3}{3+1}\overrightarrow{AC}=\dfrac{1}{4}(-2,7)+\dfrac{3}{4}(3,8)=\left(\dfrac{7}{4},\dfrac{31}{4}\right)$

令 $D(x,y)$，$\because \overrightarrow{AD}=(x+1,y+2)=\left(\dfrac{7}{4},\dfrac{31}{4}\right)$　$\therefore D(x,y)=\left(\dfrac{3}{4},\dfrac{23}{4}\right)$

例題 13

求下列直線的參數式：(1)通過 $P(1,3)$，$Q(2,4)$ 的直線；

(2)方程式為 $x-2y+4=0$ 的直線；(3)過 $P(1,1)$ 且平行 $x-2y+4=0$ 的直線。

■：(1) 直線的一方向向量是 $\overrightarrow{PQ}=(2-1,4-3)=(1,1)$，

取方向向量 $(1,1)$，則直線的參數式爲 $\begin{cases}x=1+t\\ y=3+t\end{cases}$，$t$ 是實數

(2) 令 $y=t$，則 $x=2t-4$，則直線的參數式爲 $\begin{cases}x=2t-4\\ y=t\end{cases}$，$t$ 是實數

(3) 過 $P(1,1)$ 且平行 $x-2y+4=0$ 的直線，其參數式爲 $\begin{cases}x=2t+1\\ y=t+1\end{cases}$，$t$ 是實數

例題 14

L_1：$\begin{cases} x=1-2t \\ y=-3+t \end{cases}$，$t$ 是實數；L_2：$\begin{cases} x=3+t \\ y=-6-t \end{cases}$，$t$ 是實數；L_3 的方程式是 $x+2y=0$，試求：(1)兩直線 L_1 與 L_2 的交點；(2)兩直線 L_2 與 L_3 的交點；(3)兩直線 L_1 與 L_3 的交點。

■：(1) L_1：$x+2y=-5$，L_2：$x+y=-3$

L_1，L_2 交點為 $\begin{cases} x+2y=-5 \\ x+y=-3 \end{cases} \Rightarrow (x, y)=(-1, -2)$

(2) $\begin{cases} x+y=-3 \\ x+2y=0 \end{cases} \Rightarrow (x, y)=(-6, 3)$

(3) $\begin{cases} x+2y=-5 \\ x+2y=0 \end{cases}$ 為兩平行線，無交點

例題 15

$\begin{cases} x=1-2t \\ y=-3+t \end{cases}$，$t\geq 0$ 與下列何者表同一圖形？

(A) $\begin{cases} x=1+2t \\ y=-3+t \end{cases}$，$t\geq 0$ (B) $\begin{cases} x=t \\ y=-5-2t \end{cases}$，$t\leq 1$ (C) $\begin{cases} x=1-4t \\ y=-3+2t \end{cases}$，$t\geq 0$

(D) $\begin{cases} x=7-6t \\ y=-6+3t \end{cases}$，$t\geq 1$ (E) $\begin{cases} x=1-3t \\ y=-3+\dfrac{3}{2}t \end{cases}$，$t\geq 0$

■：$\begin{cases} x=1-2t \\ y=-3+t \end{cases}$，$t\geq 0$，起點為 $(1, -3)$，方向比為 $-2:1$

(A) $\begin{cases} x=1+2t \\ y=-3+t \end{cases}$，$t\geq 0$，起點為 $(1, -3)$，方向比為 $2:1$

(B) $\begin{cases} x=t \\ y=-5-2t \end{cases}$，$t\leq 1$，起點為 $(1, -7)$，方向比為 $1:-2$

(C) $\begin{cases} x=1-4t \\ y=-3+2t \end{cases}$，$t\geq 0$，起點為 $(1, -3)$，方向比為 $-4:2=-2:1$

(D) $\begin{cases} x=7-6t \\ y=-6+3t \end{cases}$，$t\geq 1$，起點為 $(1, -3)$，方向比為 $-6:3=-2:1$

(E) $\begin{cases} x=1-3t \\ y=-3+\dfrac{3}{2}t \end{cases}$，$t\geq 0$，起點為 $(1, -3)$，方向比為 $-3:\dfrac{3}{2}=-2:1$

故選(C)(D)(E)

例題 16

A（1，3），B（4，7），若有一動點 P（x，y）$\in \overline{AB}$，則 $2x-3y+1$ 之最大值為__。

■：$\overline{AB}$：$\begin{cases} x=1+3t \\ y=3+4t \end{cases}$，$0\leq t\leq 1$

設 P（$1+3t$，$3+4t$） ⇨ $2x-3y+1=2+6t-9-12t+1=-6t-6$

$\because 0\leq t\leq 1$　$\therefore -6\leq -6t\leq 0$ ⇨ $-12\leq -6t-6\leq -6$，故最大值爲 -6