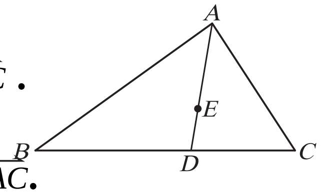
1-2　向量的基本應用

例題 1

設$\triangle ABC$中，

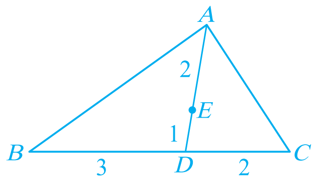
(1) $\overline{BC}$上的點D滿足$\overline{BD}:\overline{CD}=3:2$，將$\overrightarrow{AD}$表示成$x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AC}$。



(2) $\overline{AD}$上的點E滿足$\overline{AE}:\overline{DE}=2:1$，將$\overrightarrow{AE}$表示成$\alpha\overrightarrow{AB}+\beta\overrightarrow{AC}$。

■：(1) $\overrightarrow{AD}=\dfrac{2}{5}\overrightarrow{AB}+\dfrac{3}{5}\overrightarrow{AC}$

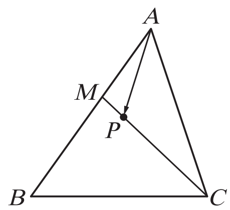
(2) $\overrightarrow{AE}=\dfrac{2}{3}\overrightarrow{AD}=\dfrac{2}{3}\left(\dfrac{2}{5}\overrightarrow{AB}+\dfrac{3}{5}\overrightarrow{AC}\right)=\dfrac{4}{15}\overrightarrow{AB}+\dfrac{2}{5}\overrightarrow{AC}$



例題 2

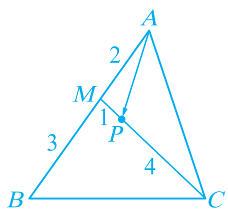
$\triangle ABC$中，點M在$\overline{AB}$上且$\overline{AM}:\overline{BM}=2:3$，點$P$在$\overline{CM}$上

且$\overline{CP}:\overline{MP}=4:1$，若$\overrightarrow{AP}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AC}$，則數對$(x,y)=$________。



■：$\overrightarrow{AP}=\dfrac{4}{5}\overrightarrow{AM}+\dfrac{1}{5}\overrightarrow{AC}=\dfrac{4}{5}\cdot\dfrac{2}{5}\overrightarrow{AB}+\dfrac{1}{5}\overrightarrow{AC}=\dfrac{8}{25}\overrightarrow{AB}+\dfrac{1}{5}\overrightarrow{AC}$

$\therefore$數對$(x,y)=\left(\dfrac{8}{25},\dfrac{1}{5}\right)$



例題 3

平面上A，B，C三點共線，O為不在此線上之任一點，若

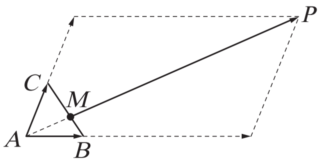
$(2t+1)\overrightarrow{OA}+(3t+4)\overrightarrow{OB}+5\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{0}$，求實數$t=$________。

■：$\overrightarrow{OC}=-\dfrac{2t+1}{5}\overrightarrow{OA}-\dfrac{3t+4}{5}\overrightarrow{OB}$

$\because C$，A，B共線　$\therefore -\dfrac{2t+1}{5}-\dfrac{3t+4}{5}=1 \Rightarrow t=-2$

例題 4

設 A，B，C 三點不共線．P 點與 A，B，C 三點在同一平面上且 $\overrightarrow{AP}=3\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AC}$．令 $\overline{AP}$ 與 $\overline{BC}$ 交於 M，試將 $\overrightarrow{AM}$ 寫成 $r\overrightarrow{AB}+s\overrightarrow{AC}$ 之形式．



■：∵$\overrightarrow{AM}$ // $\overrightarrow{AP}$ ⇨ 令$\overrightarrow{AM}=t\overrightarrow{AP}$

$\therefore\overrightarrow{AM}=t\overrightarrow{AP}=3t\overrightarrow{AB}+2t\overrightarrow{AC}$ ……………（*）

又 B，M，C 三點共線，因此令 $3t+2t=1$　$\therefore t=\frac{1}{5}$ 代入（*）

所以 $\overrightarrow{AM}=\frac{3}{5}\overrightarrow{AB}+\frac{2}{5}\overrightarrow{AC}$ 得 $r=\frac{3}{5}$，$s=\frac{2}{5}$

例題 5

設 $\vec{u}$ 與 $\vec{v}$ 是平面上任意兩不互相平行的非零向量，又 $\overrightarrow{OP}=\vec{u}+\vec{v}$，$\overrightarrow{OQ}=2\vec{u}-\vec{v}$，$\overrightarrow{OR}=r\vec{u}+s\vec{v}$，若 P，Q，R 三點共線且 $r+s+1=0$，試求 $r=$________，$s=$________．

■：$\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{OQ}-\overrightarrow{OP}=\vec{u}-2\vec{v}$，$\overrightarrow{PR}=(r-1)\vec{u}+(s-1)\vec{v}$

∵P，Q，R 三點共線

$\therefore\overrightarrow{PR}=t\overrightarrow{PQ}$ ⇨ $\frac{\overrightarrow{PR}}{\overrightarrow{PQ}}=t$ ⇨ $\frac{r-1}{1}=\frac{s-1}{-2}=t$

$\therefore -2r+2=s-1$　⇨ $2r+s=3$……………………….①

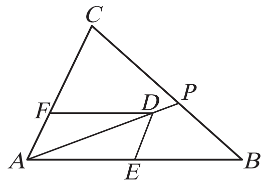
又已知 $r+s+1=0$………………②

由①、②知 $r=4$，$s=-5$

例題 6

A，B，C 為平面上不共線三點，令 $\overrightarrow{AD}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$，

設 $\overleftrightarrow{AD}$ 與 $\overline{BC}$ 交於 P，則 $\overline{AD}:\overline{AP}$ 之比值為________。



■：$\because A$，D，P 三點共線　$\therefore \overrightarrow{AP}=k\overrightarrow{AD}=\frac{k}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{k}{3}\overrightarrow{AC}$

$\because P$，B，C 三點共線　$\therefore \frac{k}{2}+\frac{k}{3}=1 \Rightarrow k=\frac{6}{5}$　$\therefore \frac{\overline{AD}}{\overline{AP}}=\frac{5}{6}$

例題 7

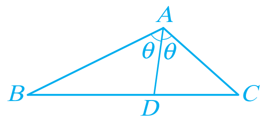
試證：

(1) 內分比：$\triangle ABC$ 中，若 $\angle A$ 內角平分線 $\overline{AD}$ 交 $\overline{BC}$ 於 $D \Rightarrow \overline{BD}:\overline{CD}=\overline{AB}:\overline{AC}$

(2) 外分比：$\triangle ABC$ 中，若 $\angle A$ 外角平分線 $\overline{AE}$ 交 $\overline{BC}$ 於 $E \Rightarrow \overline{BE}:\overline{CE}=\overline{AB}:\overline{AC}$

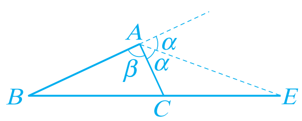
■：(1) 令 $\angle BAC=2\theta$，利用面積公式可求出 $\overline{BC}$ 的內分比

$$\frac{\overline{BD}}{\overline{CD}}=\frac{\triangle ABD\text{ 的面積}}{\triangle ACD\text{ 的面積}}=\frac{\frac{1}{2}\times\overline{AB}\times\overline{AD}\times\sin\theta}{\frac{1}{2}\times\overline{AC}\times\overline{AD}\times\sin\theta}=\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}}$$



(2) 同理 $\frac{\overline{BE}}{\overline{CE}}=\frac{\triangle ABE\text{ 的面積}}{\triangle ACE\text{ 的面積}}$

$$=\frac{\frac{1}{2}\cdot\overline{AB}\cdot\overline{AE}\cdot\sin(\alpha+\beta)}{\frac{1}{2}\cdot\overline{AC}\cdot\overline{AE}\cdot\sin\alpha}$$



$$=\frac{\frac{1}{2}\cdot\overline{AB}\cdot\overline{AE}\cdot\sin(\pi-\alpha)}{\frac{1}{2}\cdot\overline{AC}\cdot\overline{AE}\cdot\sin\alpha}=\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}}$$

例題 8

$\triangle ABC$ 中，$|\overrightarrow{AB}|=2$，$|\overrightarrow{AC}|=1$，

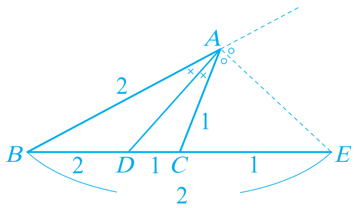
(1) 若 $\angle A$ 內角平分線 $\overline{AD}$ 交 $\overline{BC}$ 於 D，則 $\overrightarrow{AD}=$________ $\overrightarrow{AB}+$________ $\overrightarrow{AC}$。

(2) 若 $\angle A$ 外角平分線 $\overline{AE}$ 交 $\overline{BC}$ 於 E，則 $\overrightarrow{AE}=$________ $\overrightarrow{AB}+$________ $\overrightarrow{AC}$。

■：(1) $\because \overline{AD}$ 為 $\angle A$ 之內角平分線

$\therefore \overline{BD}:\overline{CD}=\overline{AB}:\overline{AC}=2:1$

$\therefore \overrightarrow{AD}=\dfrac{1}{2+1}\overrightarrow{AB}+\dfrac{2}{2+1}\overrightarrow{AC}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\dfrac{2}{3}\overrightarrow{AC}$



(2) $\because \overline{AE}$ 為 $\angle A$ 之外角平分線

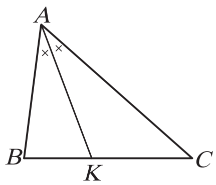
$\therefore \overline{BE}:\overline{CE}=\overline{AB}:\overline{AC}=2:1$

$\therefore \overrightarrow{AE}=\dfrac{-1}{2-1}\overrightarrow{AB}+\dfrac{2}{2-1}\overrightarrow{AC}=-\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AC}$

例題 9

設 $\triangle ABC$ 中，$\overline{AB}=4$，$\overline{BC}=5$，$\overline{CA}=6$，其中 K 在 $\overline{BC}$ 上，

求 $\angle A$ 的內角平分線 $\overline{AK}$ 的長為________。

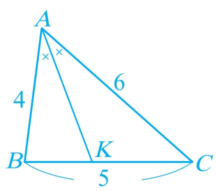


■：$\because \dfrac{\overline{BK}}{\overline{KC}}=\dfrac{\overline{AB}}{\overline{AC}}=\dfrac{4}{6}=\dfrac{2}{3}$

$\therefore \overrightarrow{AK}=\dfrac{3}{5}\overrightarrow{AB}+\dfrac{2}{5}\overrightarrow{AC}$

$|\overrightarrow{AK}|^2=\left(\dfrac{3}{5}\overrightarrow{AB}+\dfrac{2}{5}\overrightarrow{AC}\right)\cdot\left(\dfrac{3}{5}\overrightarrow{AB}+\dfrac{2}{5}\overrightarrow{AC}\right)$

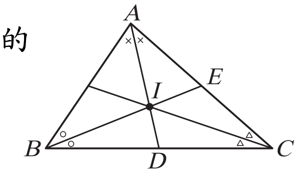
$=\dfrac{1}{25}\left(9|\overrightarrow{AB}|^2+12\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}+4|\overrightarrow{AC}|^2\right)$



而 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\dfrac{\overline{AB}^2+\overline{CA}^2-\overline{BC}^2}{2}=\dfrac{4^2+6^2-5^2}{2}=\dfrac{27}{2}$

$|\overrightarrow{AK}|^2=\dfrac{9\cdot 4^2+12\cdot\dfrac{27}{2}+4\cdot 6^2}{25}=\dfrac{144+162+144}{25}=18 \Rightarrow |\overrightarrow{AK}|=3\sqrt{2}$

例題 10



$\triangle ABC$ 中，$\overline{AB}=4$，$\overline{BC}=6$，$\overline{AC}=5$，D 為 $\angle A$ 的平分線與 $\overline{BC}$ 的交點，I 為 $\triangle ABC$ 之內心，

(1) 試求 $\dfrac{\overline{AI}}{\overline{AD}}=$ ________ 。

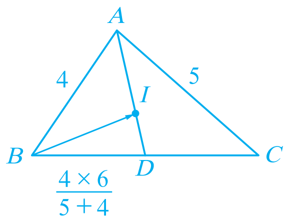
(2) 若 $\overrightarrow{AD}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AC}$，則 $x=$ ________，$y=$ ________.

(3) 若 $\overrightarrow{AI}=\alpha\overrightarrow{AB}+\beta\overrightarrow{AC}$，則 $\alpha=$ ________，$\beta=$ ________.

(4) 試求 $\overrightarrow{OI}=$ ________ 。（其中 O 為異於 A，B，C 的任意點）

■：

(1) $\because \overrightarrow{AD}$ 平分 $\angle A$



$\therefore \overline{BD}:\overline{CD}=4:5 \Rightarrow \overline{BD}=\dfrac{4}{5+4}\,\overline{BC}=\dfrac{4\times 6}{5+4}=\dfrac{8}{3}$

又 $\overleftrightarrow{BI}$ 平分 $\angle B$

$\therefore \overline{AI}:\overline{ID}=\overline{AB}:\overline{BD}=4:\dfrac{4\times 6}{5+4}=(5+4):6$

$\because \overline{AD}=\overline{AI}+\overline{ID}$ $\quad\therefore \dfrac{\overline{AI}}{\overline{AD}}=\dfrac{5+4}{6+5+4}=\dfrac{9}{15}$

(2) $\because \overleftrightarrow{AD}$ 平分 $\angle A$ $\quad\therefore \overline{BD}:\overline{CD}=4:5$

$\therefore \overrightarrow{AD}=\dfrac{5}{5+4}\overrightarrow{AB}+\dfrac{4}{5+4}\overrightarrow{AC}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AC}$ $\qquad\therefore x=\dfrac{5}{9}$，$y=\dfrac{4}{9}$

(3) $\overrightarrow{AI}=\frac{5+4}{6+5+4}\overrightarrow{AD}=\frac{5+4}{6+5+4}\left(\frac{5}{5+4}\overrightarrow{AB}+\frac{4}{5+4}\overrightarrow{AC}\right)=\frac{5}{6+5+4}\overrightarrow{AB}+\frac{4}{6+5+4}\overrightarrow{AC}$

$=\alpha\overrightarrow{AB}+\beta\overrightarrow{AC}$ $\quad\therefore \alpha=\frac{5}{15}=\frac{1}{3}$，$\beta=\frac{4}{15}$

(4) $\because \overrightarrow{AI}=\frac{5}{6+5+4}\overrightarrow{AB}+\frac{4}{6+5+4}\overrightarrow{AC}$

$\Rightarrow \overrightarrow{OI}-\overrightarrow{OA}=\frac{5}{6+5+4}(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA})+\frac{4}{6+5+4}(\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA})$

$\therefore \overrightarrow{OI}=\frac{(6+5+4-5-4)\overrightarrow{OA}+5\overrightarrow{OB}+4\overrightarrow{OC}}{6+5+4}=\frac{1}{6+5+4}(6\overrightarrow{OA}+5\overrightarrow{OB}+4\overrightarrow{OC})$

$=\frac{1}{15}(6\overrightarrow{OA}+5\overrightarrow{OB}+4\overrightarrow{OC})$

例題 11

設 G 為△ABC 的重心，O 為同一平面上任一點，則下列何者正確？

(A) $\overrightarrow{AG}+\overrightarrow{BG}+\overrightarrow{CG}=\vec{0}$

(B) $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=3\overrightarrow{OG}$

(C) △ABG 的面積＝△ACG 的面積＝△BCG 的面積

(D) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=3\overrightarrow{AG}$

(E) $\overrightarrow{BG}=\frac{2}{3}\overrightarrow{BA}+\frac{2}{3}\overrightarrow{BC}$

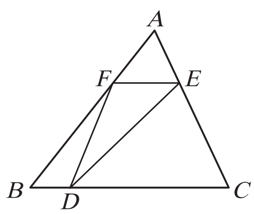
■：

$\because G$ 爲重心 $\quad\therefore \overrightarrow{OG}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC})$ 且 $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$

又△ABG 的面積＝△ACG 的面積＝△BCG 的面積

$\overrightarrow{AG}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$，$\overrightarrow{BG}=\frac{1}{3}\overrightarrow{BA}+\frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$ 　故選(A)(B)(C)(D)

例題 12



在△ABC 的三邊 $\overline{BC}$，$\overline{CA}$，$\overline{AB}$ 上分別取 D，E，F 三點，使 $\overrightarrow{DC}=4\overrightarrow{BD}$，$\overrightarrow{EC}=2\overrightarrow{AE}$，$\overrightarrow{FB}=2\overrightarrow{AF}$（如右圖）．設 G 為△DEF 的重心，$\overrightarrow{AG}=\alpha\overrightarrow{AB}+\beta\overrightarrow{AC}$，則 $\alpha=$________，$\beta=$________．

■：$\because G$ 爲$\triangle DEF$的重心　$\therefore \overrightarrow{AG}=\dfrac{1}{3}(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{AF})$ …………①

又 $\overrightarrow{DC}=4\overrightarrow{BD}$　$\therefore \overrightarrow{AD}=\dfrac{4}{5}\overrightarrow{AB}+\dfrac{1}{5}\overrightarrow{AC}$……………………………②

$\because \overrightarrow{EC}=2\overrightarrow{AE}$　$\therefore \overrightarrow{AE}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{AC}$……………………………………………③

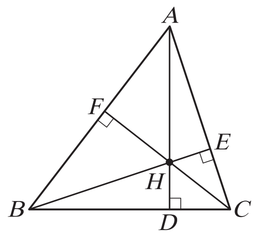
又 $\overrightarrow{FB}=2\overrightarrow{AF}$　$\therefore \overrightarrow{AF}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{AB}$……………………………………………④

由①、②、③、④得 $\overrightarrow{AG}=\dfrac{17}{45}\overrightarrow{AB}+\dfrac{8}{45}\overrightarrow{AC}$　$\therefore \alpha=\dfrac{17}{45}$，$\beta=\dfrac{8}{45}$

例題 13

三角形的垂心性質：H 是$\triangle ABC$的垂心，試證

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AH}=\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AH}=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$。



■：$\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{AB}=(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CH})\cdot\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CH}\cdot\overrightarrow{AB}$

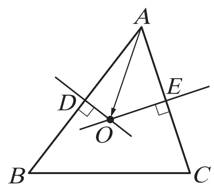
$=\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB}+0=\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB}$

同理 $\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$

例題 14

三角形的外心性質：O 是$\triangle ABC$的外心，試證：

(1) $\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{AB}=\dfrac{1}{2}|\overrightarrow{AB}|^2$。(2) $\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{AC}=\dfrac{1}{2}|\overrightarrow{AC}|^2$。



■：(1) $\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{AB}=(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DO})\cdot\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DO}\cdot\overrightarrow{AB}$

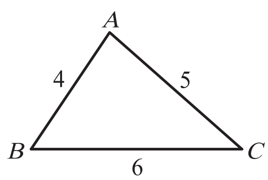
$=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AB}+0=\dfrac{1}{2}|\overrightarrow{AB}|^2$

(2) $\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{AC}=(\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{EO})\cdot\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{EO}\cdot\overrightarrow{AC}$

$=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AC}+0=\dfrac{1}{2}|\overrightarrow{AC}|^2$

例題 15

在$\triangle ABC$中，已知 $\overline{AB}=4$，$\overline{BC}=6$，$\overline{CA}=5$，令 H 為垂心，O 為外心，試求：



(1) ① $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=$________。

② $\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{BA}=$________。

③ $\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}=$________。

(2) ① $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AH}=$________，$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AH}=$________。

② $\overrightarrow{AH}=\alpha\overrightarrow{AB}+\beta\overrightarrow{AC}$，則 $\alpha=$________，$\beta=$________。

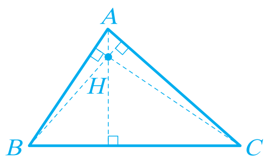
(3) ① $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AO}=$________，$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AO}=$________。

② $\overrightarrow{AO}=s\overrightarrow{AB}+t\overrightarrow{AC}$，則 $s=$________，$t=$________。

■：(1) ① $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\dfrac{4^2+5^2-6^2}{2}=\dfrac{5}{2}$；② $\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{BA}=\dfrac{4^2+6^2-5^2}{2}=\dfrac{27}{2}$；

③ $\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}=\dfrac{5^2+6^2-4^2}{2}=\dfrac{45}{2}$

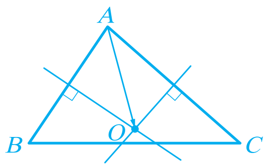
(2) ① ∵H 爲△ABC 之垂心



$$\therefore\begin{cases}\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AH}=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\dfrac{5}{2}\\[2ex]\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AH}=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\dfrac{5}{2}\end{cases}$$

② $\begin{cases}\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{AB}=\alpha\,|\overrightarrow{AB}|^2+\beta\,(\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB})\\\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{AC}=\alpha\,(\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC})+\beta\,|\overrightarrow{AC}|^2\end{cases}$ ⇨ $\begin{cases}16\alpha+\dfrac{5}{2}\beta=\dfrac{5}{2}\\[2ex]\dfrac{5}{2}\alpha+25\beta=\dfrac{5}{2}\end{cases}$ ⇨ $\alpha=\dfrac{1}{7}$，$\beta=\dfrac{3}{35}$

(3) ① O 爲△ABC 之外心 ⇨ $\begin{cases}\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AO}=\dfrac{1}{2}\,|\overrightarrow{AB}|^2=8\\[2ex]\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AO}=\dfrac{1}{2}\,|\overrightarrow{AC}|^2=\dfrac{25}{2}\end{cases}$

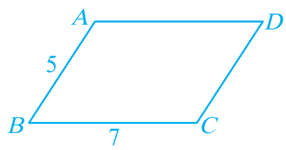


② $\begin{cases}\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AO}=s\,|\overrightarrow{AB}|^2+t\,(\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC})\\\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AO}=s\,(\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC})+t\,|\overrightarrow{AC}|^2\end{cases}$

⇨ $\begin{cases}16s+\dfrac{5}{2}t=8\\[2ex]\dfrac{5}{2}s+25t=\dfrac{25}{2}\end{cases}$ ⇨ $s=\dfrac{3}{7}$，$t=\dfrac{16}{35}$

例題 16

平行四邊形 $ABCD$，若 $|\overrightarrow{AB}|=5$，$|\overrightarrow{BC}|=7$，則 $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}=$________。

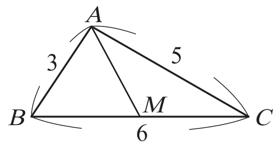


■：$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}=(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC})\cdot(\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{AB})$

$=|\overrightarrow{BC}|^2-|\overrightarrow{AB}|^2=7^2-5^2=24$

例題 17

$\triangle ABC$ 中，若 $\overline{AB}=3$，$\overline{BC}=6$，$\overline{AC}=5$，M 為 $\overline{BC}$ 之中點，



則 $\overline{AM}=$________。

■：利用中線定理：$\overline{AB}^2+\overline{AC}^2=2\left[\overline{AM}^2+\left(\dfrac{\overline{BC}}{2}\right)^2\right]$

⇨ $9+25=2(\overline{AM}^2+3^2)$ ⇨ $\overline{AM}^2=8$　　$\therefore\overline{AM}=2\sqrt{2}$