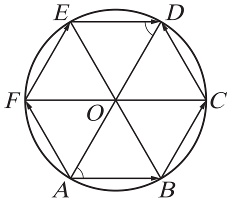
1-1　有向線段與向量

例題 1



正六邊形 $ABCDEF$ 中，若 $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$，$\overrightarrow{BC}=\vec{b}$，則：

(1) 以 $\vec{a}$，$\vec{b}$ 表示下列向量：

① $\overrightarrow{CD}=$＿＿＿＿＿＿；② $\overrightarrow{DE}=$＿＿＿＿＿＿；③ $\overrightarrow{FD}=$＿＿＿＿＿＿。

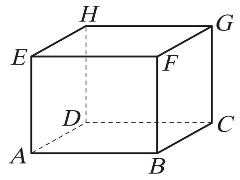
(2) 各邊可以決定＿＿＿＿＿＿種不同的向量。

■：(1) ① $\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AF}=\vec{b}-\vec{a}$；② $\overrightarrow{DE}=-\vec{a}$；③ $\overrightarrow{FD}=\vec{a}+\vec{b}$

(2) ① $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{ED}=\vec{a}$；② $\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{DE}=-\vec{a}$；③ $\overrightarrow{AF}=\overrightarrow{CD}=\vec{b}-\vec{a}$

④ $\overrightarrow{FA}=\overrightarrow{DC}=\vec{a}-\vec{b}$；⑤ $\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{FE}=\vec{b}$；⑥ $\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{EF}=-\vec{b}$

例題 2



對於圖中的平行六面體，下列敘述何者為真？

(A) $\overrightarrow{HG}=\overrightarrow{AB}$　(B) $\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{EH}+\overrightarrow{HD}+\overrightarrow{DA}=\vec{0}$　(C) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$

(D) $\overrightarrow{AF}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DG}=\overrightarrow{AH}+\overrightarrow{AB}$　(E) $\overrightarrow{AH}+\overrightarrow{GB}=\vec{0}$

■：(A) $\overrightarrow{HG}=\overrightarrow{AB}$

(B) $\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{EH}+\overrightarrow{HD}+\overrightarrow{DA}=\overrightarrow{AA}=\vec{0}$

(C) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$

(D) $\overrightarrow{AF}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AF}+\overrightarrow{FG}=\overrightarrow{AG}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DG}$ …………………①

又 $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{HG}$　$\therefore \overrightarrow{AH}+\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AH}+\overrightarrow{HG}=\overrightarrow{AG}$ ……………②

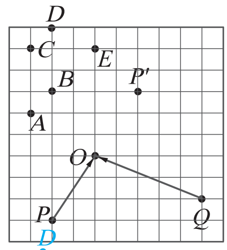
由①、②知 $\overrightarrow{AF}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DG}=\overrightarrow{AH}+\overrightarrow{AB}$

(E) $\overrightarrow{AH}=-\overrightarrow{GB}$　$\therefore \overrightarrow{AH}+\overrightarrow{GB}=\vec{0}$

故全選

例題 3

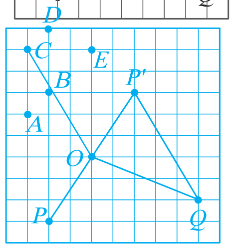
如右圖，下面哪一選項中的向量與另兩個向量 $\overrightarrow{PO}$，$\overrightarrow{QO}$ 之和等於零向量？(A) $\overrightarrow{AO}$ (B) $\overrightarrow{BO}$ (C) $\overrightarrow{CO}$ (D) $\overrightarrow{DO}$ (E) $\overrightarrow{EO}$。



■：如右圖，取 $\overrightarrow{OP'}=\overrightarrow{PO}$，

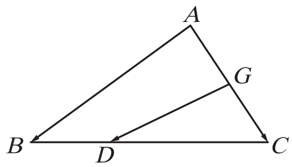
則 $\overrightarrow{QO}+\overrightarrow{PO}=\overrightarrow{QO}+\overrightarrow{OP'}=\overrightarrow{QP'}\Rightarrow\overrightarrow{CO}+\overrightarrow{QP'}=\vec{0}$

（$\because\overrightarrow{CO}$ 與 $\overrightarrow{QP'}$ 長度相同、方向相反）　　故選(C)



例題 4

如右圖，D 在$\triangle ABC$ 之 $\overline{BC}$ 邊上，且 $\overline{CD}=2\overline{BD}$，$G$ 為 $\overline{AC}$ 之中點，若將 $\overrightarrow{GD}$ 向量寫為 $\overrightarrow{GD}=r\overrightarrow{AB}+s\overrightarrow{AC}$，其中 r 及 s 為實數，則 $r+s$ 之值等於(A) $\frac{1}{2}$ (B) $\frac{2}{3}$ (C) $\frac{1}{3}$ (D) $-\frac{1}{3}$ (E) $-\frac{4}{3}$

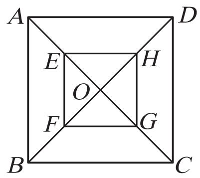


■：$\overrightarrow{GD}=\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{BC}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB})$

$=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}-\frac{1}{6}\overrightarrow{AC}$　　$\therefore r+s=\frac{1}{2}$，故選(A)

例題 5

如右圖，O 為正方形 $ABCD$ 對角線的交點，且 E，F，G，H 分別為 $\overline{OA}$，$\overline{OB}$，$\overline{OC}$，$\overline{OD}$ 的中點。試問下列何者為真？



(A) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{EF}+\overrightarrow{FG}+\overrightarrow{GC}$ (B) $\overrightarrow{AB}=2\overrightarrow{EF}$

(C) $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{DB}$ (D) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BF}+\overrightarrow{FE}=\overrightarrow{GC}$ (E) $\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{BF}=0$

■：(A) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{EG}+\overrightarrow{GC}=\overrightarrow{AE}+(\overrightarrow{EF}+\overrightarrow{FG})+\overrightarrow{GC}$

(B) $\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{OF}-\overrightarrow{OE}=\frac{1}{2}\overrightarrow{OB}-\frac{1}{2}\overrightarrow{OA}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA})=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$

(C) $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{BC}=-(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC})=-\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{DB}$

(D) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BF}+\overrightarrow{FE}=\overrightarrow{AE}=\dfrac{1}{4}\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{GC}$

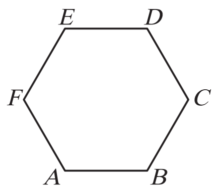
(E) $\because \overleftrightarrow{AE}\perp\overline{BD}$ $\quad\therefore \overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{BF}=0$ 故全選

例題 6

設 $\vec{u}\nparallel\vec{v}$ 且 x，$y\in\mathbb{R}$，若（$x-y+2$）$\vec{u}+$（$-x+2y-5$）$\vec{v}=\vec{0}$，求 x，y 之值。

■：$\begin{cases} x-y+2=0 \\ -x+2y-5=0 \end{cases}$ $\quad\therefore \begin{cases} x=1 \\ y=3 \end{cases}$

例題 7

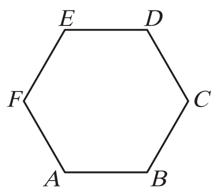


若正六邊形 $ABCDEF$ 邊長為 2，則 $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BE}=$________。

■：$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BE}=(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC})\cdot\overrightarrow{BE}=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{BE}$

$=\overline{AB}\cdot\overline{BE}\cdot\cos120^\circ+\overline{BC}\cdot\overline{BE}\cdot\cos60^\circ$

$=2\cdot4\cdot\left(-\dfrac{1}{2}\right)+2\cdot4\cdot\dfrac{1}{2}=0$



例題 8

如右圖，$ABCDEF$ 是邊長為 1 的正六邊形，則下列各內積的大小排列為何？

(A) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AB}$ (B) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$ (C) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}$ (D) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AE}$ (E) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AF}$

■：(A) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AB}=|\overrightarrow{AB}|^2=1$

(B) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AC}|\cdot\cos\angle BAC=1\cdot\sqrt{3}\cdot\cos30^\circ=\dfrac{3}{2}$

(C) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}=|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AD}|\cdot\cos\angle BAD=1\cdot2\cdot\cos60^\circ=1$

(D) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AE}=|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AE}|\cdot\cos\angle BAE=1\cdot\sqrt{3}\cdot\cos90^\circ=0$

(E) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AF}=|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AF}|\cdot\cos\angle BAF=1\cdot1\cdot\cos120^\circ=-\dfrac{1}{2}$

$\therefore$(B)$>$(A)$=$(C)$>$(D)$>$(E)

例題 9

兩向量 $\overrightarrow{AB}$ 與 $\overrightarrow{CD}$ 之間的夾角是 120° 且大小分別是 6 與 4，試求：

(1) $|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}|$．　　(2) $|2\overrightarrow{AB}+3\overrightarrow{CD}|$．

■：(1) $|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}|^2=(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD})\cdot(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD})=|\overrightarrow{AB}|^2+2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}+|\overrightarrow{CD}|^2$

$=36+2\cdot 6\cdot 4\cdot\cos 120^\circ+16=28$

$\therefore |\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}|=\sqrt{28}=2\sqrt{7}$

(2) $|2\overrightarrow{AB}+3\overrightarrow{CD}|^2=(2\overrightarrow{AB}+3\overrightarrow{CD})\cdot(2\overrightarrow{AB}+3\overrightarrow{CD})=4|\overrightarrow{AB}|^2+12\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}+9|\overrightarrow{CD}|^2$

$=4\cdot 36+12\cdot 6\cdot 4\cdot\cos 120^\circ+9\cdot 16=144$

$\therefore |2\overrightarrow{AB}+3\overrightarrow{CD}|=12$

例題 10

設 $\vec{a}$，$\vec{b}$ 為兩向量，若 $|\vec{a}+\vec{b}|=4$，$|\vec{a}-\vec{b}|=2$，則 $\vec{a}\cdot\vec{b}=$________．

■：$|\vec{a}+\vec{b}|^2=|\vec{a}|^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2=16$ ....①

$|\vec{a}-\vec{b}|^2=|\vec{a}|^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2=4$ ....②

①－②得 $4\vec{a}\cdot\vec{b}=12$　$\therefore \vec{a}\cdot\vec{b}=3$

例題 11

若兩向量 $\vec{a}$，$\vec{b}$ 滿足 $3\vec{a}+2\vec{b}=\vec{0}$，且 $|\vec{b}|=6$，則 $\vec{a}\cdot\vec{b}=$________．

■：由 $3\vec{a}+2\vec{b}=\vec{0}$ 得 $\vec{a}=-\dfrac{2}{3}\vec{b}$，知 $\vec{a}$，$\vec{b}$ 反向且 $|\vec{a}|=\dfrac{2}{3}|\vec{b}|=4$

故 $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos 180^\circ=4\cdot 6\cdot(-1)=-24$

例題 12

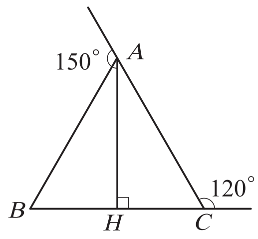
設 $|\vec{b}|=2|\vec{a}|$，若 $\vec{a}+\vec{b}$ 與 $5\vec{a}-2\vec{b}$ 垂直，則 $\vec{a}$ 與 $\vec{b}$ 夾角的餘弦值為________．

■：$(\vec{a}+\vec{b})\cdot(5\vec{a}-2\vec{b})=0 \Rightarrow 5|\vec{a}|^2+3\vec{a}\cdot\vec{b}-2|\vec{b}|^2=0$

又 $|\vec{b}|=2|\vec{a}|$ ，因此 $5|\vec{a}|^2+3\vec{a}\cdot\vec{b}-8|\vec{a}|^2=0 \Rightarrow \vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|^2$

故 $\cos\theta=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=\dfrac{|\vec{a}|^2}{|\vec{a}|\cdot 2|\vec{a}|}=\dfrac{1}{2}$

例題 13



正三角形 ABC 的邊長為 1，$\overline{AH}$ 為 $\overline{BC}$ 上的高，則

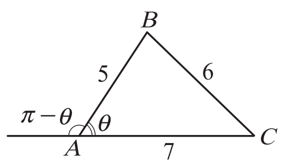
$(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{AH})\cdot\overrightarrow{CA}=$________。

[redacted]：$(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{AH})\cdot\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{CA}$

$=\overline{BC}\cdot\overline{CA}\cdot\cos120^\circ+\overline{AH}\cdot\overline{CA}\cdot\cos150^\circ$

$=1\cdot1\cdot\left(-\dfrac{1}{2}\right)+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cdot1\cdot\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)=-\dfrac{1}{2}-\dfrac{3}{4}=-\dfrac{5}{4}$

例題 14



$\triangle ABC$ 中，$\overline{AB}=5$，$\overline{BC}=6$，$\overline{CA}=7$，則：

(1) $\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}=$________。(2) $\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{AB}=$________。

(3) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}=$________。

[redacted]：(1) $\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}=|\overrightarrow{CA}||\overrightarrow{CB}|\cdot\cos C=|\overrightarrow{CA}||\overrightarrow{CB}|\cdot\dfrac{|\overrightarrow{CA}|^2+|\overrightarrow{CB}|^2-|\overrightarrow{AB}|^2}{2|\overrightarrow{CA}||\overrightarrow{CB}|}$

$=\dfrac{1}{2}\left(|\overrightarrow{CA}|^2+|\overrightarrow{CB}|^2-|\overrightarrow{AB}|^2\right)=\dfrac{1}{2}(7^2+6^2-5^2)=30$

(2) $\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{AB}=-\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB}=-\dfrac{1}{2}\left(|\overrightarrow{AC}|^2+|\overrightarrow{AB}|^2-|\overrightarrow{BC}|^2\right)$

$=-\dfrac{1}{2}(49+25-36)=-19$

(3) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}=-(\overrightarrow{BA})\cdot(\overrightarrow{BC})=-\dfrac{5^2+6^2-7^2}{2}=-6$