

高雄市明誠中學 高二數學平時測驗					日期：100.06.08	
範圍	3-2.3 機率、期望值	班級	二年__班	姓名		
		座號				

一、填充題(每題 10 分)

1、擲三粒公正的骰子，求：

(1)三個點數均相異的機率為_____。

(2)三個點數成等差的機率為_____。

答案：(1) $\frac{5}{9}$, (2) $\frac{7}{36}$

解析：(1)6 個點數選 3 個： $\frac{C_3^6 \times 3!}{6^3} = \frac{5}{9}$ 。

(2)公差為 0：(1.1.1)(2.2.2)(3.3.3)(4.4.4)(5.5.5)(6.6.6)共 6 種，

公差為 1：(1.2.3)(2.3.4)(3.4.5)(4.5.6)共有 $4 \times 3! = 24$ 種，

公差為 2：(1.3.5)(2.4.6)共有 $2 \times 3! = 12$ 種，

共有 42 種，所求機率為 $\frac{42}{216} = \frac{7}{36}$ 。

2、將 A, B, C, D, E 等 5 人的名片各一張，任意發給此 5 人，每人一張，則

(1)恰有 4 人得自己名片的機率為_____。

(2)恰有 2 人得自己名片的機率為_____。

(3)沒有任何 1 人得自己名片的機率為_____。

答案：(1)0, (2) $\frac{1}{6}$, (3) $\frac{11}{30}$

解析：

(1)∵4 人得自己名片，則第 5 人必得自己的名片，∴所求機率為 0。

(2)選 2 人得自己名片，另 3 人錯排： $\frac{C_2^5(C_0^3 \times 3! - C_1^3 \times 2! + C_2^3 \times 1! - C_3^3 \times 0!)}{5!} = \frac{1}{6}$ 。

(3)5 人錯排： $\frac{C_0^5 \times 5! - C_1^5 \times 4! + C_2^5 \times 3! - C_3^5 \times 2! + C_4^5 \times 1! - C_5^5 \times 0!}{5!} = \frac{11}{30}$ 。

3、有 8 位旅客，搭乘一列掛有 4 節車廂的火車，則每節車廂皆有其中 2 位旅客的機率為_____。

答案： $\frac{3^2 \cdot 5 \cdot 7}{2^{13}}$

解析：先將 8 人平分為 4 組，再排列至節車廂機率為 $\frac{C_2^8 C_2^6 C_2^4 C_2^2 \times 4!}{4^8}$ 。

4、甲、乙兩人分別從 0 至 99 的 100 個數中，各自選出 3 個不同的數，則兩人所選的數至少有一數相同的機率為_____。(以最簡分數表示之)

答案： $\frac{713}{8085}$

解析： $1 - \frac{C_3^{100} C_3^{97}}{C_3^{100} C_3^{100}} = \frac{713}{8085}$ 。
數字全不相同

5、擲一公正骰子四次，則

(1)恰有兩次為同點數之機率為_____；

(2)最大點數為3之機率為_____。

答案： (1) $\frac{5}{9}$, (2) $\frac{65}{1296}$

解析：(1)四次用了3個點數： $P = \frac{C_3^6 \cdot \frac{3!}{2!} \times \frac{4!}{2!}}{6^4} = \frac{10 \times 12}{216} = \frac{5}{9}$ 。

(2)點數1.2.3投擲四次中，至少一次3點： $P = \frac{3^4 - 2^4}{6^4} = \frac{65}{1296}$ 。

6、有 n 個人玩擲一個骰子的遊戲，請問至少要有_____人參加，才會有「至少一人擲出一點的機率高於90%」。(log 2 \div 0.3010, log 3 \div 0.4771)

答案：13

解析：『至少一人擲出一點』即『全-(沒1點)』

$$P = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^n > 0.9 \Rightarrow \left(\frac{5}{6}\right)^n < 0.1$$

$$\Rightarrow \log\left(\frac{5}{6}\right)^n < \log 0.1 \Rightarrow n \log \frac{5}{6} < -1$$

$$\Rightarrow n(\log 5 - \log 6) < -1$$

$$\Rightarrow n[(\log 10 - \log 2) - (\log 2 + \log 3)] < -1$$

$$\Rightarrow n[1 - 2 \times 0.3010 - 0.4771] < -1$$

$$\Rightarrow n(-0.0791) < -1 \Rightarrow n > \frac{1}{0.0791} \div 12.6, \quad \therefore n = 13.$$

7、袋中有3白球,4黑球,2紅球，一次取兩球，取後不放回，則

(1)僅取一次，取到兩球同色之機率為_____；

(2)先後取兩次，均取到同色球，取後袋中仍有白、黑、紅三色球之機率為_____。

答案：(1) $\frac{5}{18}$, (2) $\frac{1}{21}$

解析：(1)2W、2B、2R： $P = \frac{C_2^3 + C_2^4 + C_2^2}{C_2^9} = \frac{3+6+1}{36} = \frac{5}{18}$ 。

(2)2W2B 或 2B2W, $P = \frac{C_2^4}{C_2^9} \times \frac{C_2^3}{C_2^7} + \frac{C_2^3}{C_2^9} \times \frac{C_2^4}{C_2^7} = 2 \times \frac{6 \times 3}{36 \times 21} = \frac{1}{21}$ 。

8、袋中有3白球,4紅球,5黑球，若每球被取的機會均等，今每次由袋中取一個，取後不放回，連續取球，則白球先取完之機率為_____。

答案： $\frac{3}{4}$

解析：白球先取完即最後為紅或黑： $P = \frac{4+5}{12} = \frac{9}{12} = \frac{3}{4}$.

9、5人同時玩猜拳(剪刀，石頭，布)遊戲一次，則平手之機率為_____.

答案： $\frac{17}{27}$

解析：平手即全部－(一人贏＋二人贏＋三人贏＋四人贏)

$$P = 1 - \frac{C_1^5 C_1^3 \times 1^4 + C_2^5 C_1^3 \times 1^3 + C_3^5 C_1^3 \times 1^2 + C_4^5 C_1^3 \times 1}{3^5} = 1 - \frac{5+10+10+5}{81} = \frac{51}{81} = \frac{17}{27}.$$

10、某一工廠生產燈泡,10個裝成一盒，工廠品質檢驗的方法是從每盒中任取4個來檢查，如有兩個或兩個以上的燈泡是壞的，則整盒淘汰.若某一盒有4個壞燈泡，則這一盒被淘汰的機率是_____.

答案： $\frac{23}{42}$

解析：4壞＋3壞＋2壞

$$P = \frac{C_4^4 + C_3^4 \cdot C_1^6 + C_2^4 \cdot C_2^6}{C_4^{10}} = \frac{1+24+90}{\frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}} = \frac{115}{21 \times 10} = \frac{23}{42}.$$

11、甲、乙、丙、……等12人，分住A、B、C三房間，每間4人，則甲、乙兩人住同一房間之機率為_____.

答案： $\frac{3}{11}$

解析： $P = \frac{\frac{C_2^{10} \cdot C_4^8 \cdot C_4^4}{2!} \times 3!}{\frac{C_4^{12} \cdot C_4^8 \cdot C_4^4}{3!} \times 3!} = \frac{3 \times 45}{45 \times 11} = \frac{3}{11}.$

12、將四對夫婦共8人平分成四組，則每組中恰有一男一女的機率為_____.

答案： $\frac{8}{35}$

解析：4位先生在4位太太前排列： $P = \frac{4!}{\frac{C_2^8 \cdot C_2^6 \cdot C_2^4 \cdot C_2^2}{4!}} = \frac{24}{105} = \frac{8}{35}.$

13、將5個不同的球丟入3個不同的箱子：

(1)每箱均有球之機率為_____，

(2)恰有一個空箱之機率為_____.

答案：(1) $\frac{50}{81}$ ；(2) $\frac{10}{27}$

解析：(1)每箱至少一球： $\frac{C_0^3 \cdot 3^5 - C_1^3 \cdot 2^5 + C_2^3 \cdot 1^5 - C_3^3 \cdot 0^5}{3^5} = \frac{50}{81}$

(2)選1為空箱，另2箱每箱至少一球： $\frac{C_1^3 (C_0^2 \cdot 2^5 - C_1^2 \cdot 1^5 + C_2^2 \cdot 0^5)}{3^5} = \frac{10}{27}$

14、投擲四顆骰子有如下表的獎金，則期望值為_____元。

出現	四骰子同點	恰三骰子同點	骰子兩兩同點
獎金	200 元	100 元	50 元

答案： $13\frac{71}{108}$

解析： $\frac{6}{6^4} \times 200 + \frac{C_2^6 \times 2! \times \frac{4!}{3!}}{6^4} \times 100 + \frac{C_2^6 \times \frac{4!}{2! \times 2!}}{6^4} \times 50 = 13\frac{71}{108}$.

15、設有一袋裝有 1 號球 1 個, 2 號球 2^2 個, …… , k 號球 k^2 個, …… , 25 號球 25^2 個 ($1 \leq k \leq 25$), 現自袋中任取一球, 設每球被取到的機會都相等, 取中 k 號球可得 k 元, 而取到 13 號球的機率為_____, 則任取一球的期望值為_____元。

答案： $\frac{13}{425}, \frac{325}{17}$

解析： (1) 抽到 13 號的機率為 $\frac{13^2}{1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + 25^2} = \frac{13^2}{\frac{1}{6} \times 25 \times 26 \times 51} = \frac{13}{425}$.

(2) 任取一球的期望值為 $\frac{1 \times 1^2 + 2 \times 2^2 + 3 \times 3^2 + \dots + 25 \times 25^2}{1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + 25^2} = \frac{\left(\frac{1}{2} \times 25 \times 26\right)^2}{\frac{1}{6} \times 25 \times 26 \times 51} = \frac{325}{17}$ (元).

16、袋中有 5 個紅球, 4 個白球, 由其中任意取出兩球, 則兩球皆為紅球可得 20 元, 兩球皆為白球可得 10 元, 則所得的期望值為_____元。

答案： $\frac{65}{9}$

解析： $\frac{C_2^5}{C_2^9} \times 20 + \frac{C_2^4}{C_2^9} \times 10 = \frac{65}{9}$.

17、擲三個硬幣, 若出現三個正面可得 12 元, 出現兩個正面可得 8 元, 出現一個正面可得 4 元, 為了公平起見, 出現三個反面時應賠_____元。

答案： 48

解析： 設賠 k 元, $\frac{1}{2^3} \times 12 + \frac{3}{2^3} \times 8 + \frac{3}{2^3} \times 4 + \frac{1}{2^3} \times (-k) = 0 \Rightarrow k = 48$.

18、袋中有 5 個紅球, 4 個白球, 今由其中任取兩球, 則取得紅球之個數的期望值為_____個。

答案： $\frac{10}{9}$

解析： 取 1 個球而為紅球的平均值為 $\frac{5}{9}$, 取兩個球而為紅球的期望值為 $\frac{10}{9}$.

19、袋中有十個硬幣, 其中有四個 10 元, 三個 5 元, 其他三個同值, 若從袋中一次取出兩個硬幣的期望值為 11.6 元, 則其他三個硬幣之值為_____元。

答案： 1

解析：設其他三個硬幣之值為 k 元，一次取出兩個硬幣的期望值為 11.6 元

$$\text{則取 1 個硬幣的期望值為 } \frac{11.6}{2} = 5.8 = \frac{4 \times 10 + 3 \times 5 + 3 \times k}{10} \Rightarrow k = 1(\text{元}).$$

20、彩券發售 20 萬張，獎額如下：頭獎 2 張各得 50 萬元，二獎 3 張各得 20 萬元，三獎 5 張各得 10 萬元，四獎 20 張各得 5 萬元，五獎 50 張各得 1 萬元，六獎 120 張各得 2000 元，七獎 800 張各得 1000 元，八獎 5000 張各得 12 元，則

(1)中獎率為_____。(2)購買 2 張的期望值為_____元。

答案：(1)0.03, (2)47

解析：(1) $\frac{2+3+5+20+50+120+800+5000}{200000} = \frac{3}{100} = 0.03.$

(2)購買一張的期望值

$$\frac{2 \times 500000 + 3 \times 200000 + 5 \times 100000 + 20 \times 50000 + 50 \times 10000 + 120 \times 2000 + 800 \times 1000 + 5000 \times 12}{200000} \\ = \frac{1}{20} (100 + 60 + 50 + 100 + 50 + 24 + 80 + 6) = \frac{47}{2},$$

$$\text{購買 2 張的期望值為 } 2 \times \frac{47}{2} = 47(\text{元}).$$

21、數人賭博，其中一人作莊，不作莊的先交給莊家 3 元，並可得到擲一個公正銅板 1 次的權利，規定：擲得正面時，莊家賠 5 元，反面莊家不賠，則

(1)不作莊的人期望值為_____元，故此種玩法_____ (填上公平、不公平)。

(2)若玩法公平時，當得反面時，莊家應賠_____元。

答案：(1)2.5, 不公平, (2)1

解析：(1) $(-3) + \frac{1}{2} \times 5 = -0.5$ ，不公平。

$$(2) \text{ 設反面莊家賠 } k \text{ 元，} (-3) + \frac{1}{2} \times 5 + \frac{1}{2} \times k = 0 \Rightarrow k = 1.$$

22、10 個樣品中有 2 個不良品，今取出 3 個，則含有不良品個數的期望值為_____個。

答案： $\frac{3}{5}$

解析：取一個的不良品個數期望值為 $\frac{2}{10} = \frac{1}{5}$ ，故取三個的不良品期望值為 $\frac{2}{10} \times 3 = \frac{3}{5}$ 。

23、擲一粒公正特製骰子兩次，骰子六面之點數為 1, 2, 2, 2, 3, 3, 則兩次點數和的期望值為_____。

答案： $\frac{13}{3}$

解析：擲一次點數的期望值為 $\frac{1+2+2+2+3+3}{6} = \frac{13}{6}$ ，擲兩次點數和的期望值為 $\frac{13}{6} \times 2 = \frac{13}{3}$ 。

24、將 3 個球投入三個不同的袋子裡，每次投 1 個球，連續投三次，則

(1)每個袋子都有球的機率為_____。

(2)3 個球都在同一袋子的機率為_____。

(3)空袋子個數的期望值為_____個。

答案：(1) $\frac{2}{9}$, (2) $\frac{1}{9}$, (3) $\frac{8}{9}$

解析：將 3 個不同的球投入 3 個不同的袋中，每次投一球，其方法有 $3^3 = 27$ (種)，

(1) 每個袋子都有球的情形有 $3! = 6$ (種)，所求機率為 $\frac{6}{27} = \frac{2}{9}$ ，即空袋子個數為 0 的機率 $\frac{2}{9}$ 。

(2) 3 個球都在同一袋的情形有 3 種，故所求機率為 $\frac{3}{27} = \frac{1}{9}$ ，即有 2 個空袋子的機率 $\frac{1}{9}$ 。

(3) 由(1)(2)知

空袋子的個數 x	0	1	2
機率 P	$\frac{2}{9}$	$1 - \frac{2}{9} - \frac{1}{9}$	$\frac{1}{9}$

故所求期望值 $E(x) = 0 \times \frac{2}{9} + 1 \times \left(1 - \frac{2}{9} - \frac{1}{9}\right) + 2 \times \frac{1}{9} = \frac{8}{9}$ (個)。

25、袋中有 1 個 1 號球，2 個 2 號球，……， n 個 n 號球，……，25 個 25 號球， $1 \leq n \leq 25$ ，現自袋中任取一球，設每一個球被取到的機會都相等，而取得 n 號球可得 $(100 - n)$ 元，則

(1) 取到 19 號球的機率為_____。(2) 而任取一球的期望值為_____元。

答案：(1) $\frac{19}{325}$, (2) 83

解析：(1) 總球數 $= 1 + 2 + 3 + \dots + 25 = \frac{25 \times 26}{2} = 325$ ， \therefore 取到 n 號球的機率為 $\frac{n}{325}$ ，

故取到 19 號球的機率為 $\frac{19}{325}$ 。

$$\begin{aligned} (2) & \frac{1 \times (100 - 1) + 2 \times (100 - 2) + 3 \times (100 - 3) + \dots + 25 \times (100 - 25)}{1 + 2 + 3 + \dots + 25} \\ &= \frac{100(1 + 2 + 3 + \dots + 25) - (1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + 25^2)}{1 + 2 + 3 + \dots + 25} \\ &= \frac{100(1 + 2 + 3 + \dots + 25)}{1 + 2 + 3 + \dots + 25} - \frac{(1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + 25^2)}{1 + 2 + 3 + \dots + 25} \\ &= 100 - \frac{\frac{1}{6} \times 25 \times 26 \times 51}{\frac{1}{2} \times 25 \times 26} = 100 - 17 = 83 \text{ (元)}. \end{aligned}$$

14、根據某家人壽保險公司的統計，在 A 地 50 歲的中年人活到 51 歲的機會有 0.992，現在此保險公司出售一年 10000 元的壽險給與 50 歲的中年人，只需繳保險費 100 元，則該保險公司可獲得期望利潤為_____元。

答案：20

解析： $0.992 \times 100 - 0.008 \times (10000 - 100) = (0.992 + 0.008) \times 100 - 0.008 \times 10000 = 20$ 。