高雄市明誠中學 高二數學平時測驗 日期：100.06.22					
範圍	2-6 遞迴關係	班級	二年____班	姓名	
		座號			

一、填充題 (每題 20 分)

14-1、試求(1)數列{ a_n }：3,7,11,15,………的遞迴關係式。

(2)數列{ b_n }： $2,\frac{8}{3},\frac{32}{9},\frac{128}{27},......$ 的遞迴關係式。

答案： (1) $a_1=3,\ a_n=a_{n-1}+4,\ n\ge 2,\quad n\in N$ (2) $b_1=2,\ b_n=\frac{4}{3}b_{n-1},\quad n\ge 2,\quad n\in N$

解析： (1) 數列{ a_n }：3,7,11,15,……… $\Rightarrow$ 首項為 3 且公差為 4 的等差數列

遞迴關係式： $a_1=3,\ a_n=a_{n-1}+4,\ n\ge 2,\quad n\in N$

(2) 數列{ b_n }： $2,\frac{8}{3},\frac{32}{9},\frac{128}{27},......\Rightarrow$ 首項為 2 且公比為 $\frac{4}{3}$ 的等比數列

遞迴關係式： $b_1=2,\ b_n=\frac{4}{3}b_{n-1},\quad n\ge 2,\quad n\in N$

14-2、(1)數列{ a_n }滿足 $a_1=1,\ a_{n+1}=3a_n+2,\ n\in N$ ，試求一般項 a_n 。

(2)數列{ a_n }滿足 $a_1=2,\ a_{n+1}=4-3a_n,\ n\in N$ ，試求 a_6 。

答案：(1) $a_n=2\cdot 3^{n-1}-1$, (2) $a_6=-242$

解析： (1) $a_n=3a_{n-1}+2\Rightarrow$ 設 $a_n+k=3(a_{n-1}+k)$

$$
\begin{aligned}
&a_n=3a_{n-1}+2k\Rightarrow 2k=2,\ k=1\\
&a_n+1=3(a_{n-1}+1)\\
&a_2+1=3(a_1+1)\\
&a_3+1=3(a_2+1)\\
&a_4+1=3(a_3+1)\\
&\ \vdots\qquad\ \vdots\\
&\underline{+)\ a_n+1=3(a_{n-1}+1)}\\
&a_n+1=3^{n-1}(a_1+1)\Rightarrow a_n=2\cdot 3^{n-1}-1
\end{aligned}
$$

(2) $a_n=-3a_{n-1}+4\Rightarrow$ 設 $a_n+k=-3(a_{n-1}+k)$

$$
\begin{aligned}
&a_n=-3a_{n-1}-4k\Rightarrow 4k=-4,\ k=-1\\
&a_n-1=3(a_{n-1}-1)\\
&a_2-1=-3(a_1-1)\\
&a_3-1=-3(a_2-1)\\
&a_4-1=-3(a_3-1)\\
&\ \vdots\qquad\ \vdots\\
&\underline{+)\ a_n-1=-3(a_{n-1}-1)}\\
&a_n-1=(-3)^{n-1}(a_1-1)\Rightarrow a_n=(-3)^{n-1}+1,\quad a_6=(-3)^5+1=-242
\end{aligned}
$$

14-3、平面上 n 條直線滿足任三條直線不平行、不共點，若此 n 條直線將平面分隔個區域，試求

(1) a_5之值；(2)數列{ a_n }的遞迴關係式。

$\boxed{\text{答案}}$：(1)16；(2) $a_n = a_{n-1} + n, \quad n \ge 2, n \in N$

$\boxed{\text{解析}}$：

(1) $a_1 = 2, \quad a_2 = a_1 + 2 = 2 + 2 = 4, \quad a_3 = a_2 + 3 = 4 + 3 = 7,$

$a_4 = a_3 + 4 = 7 + 4 = 11, \quad a_5 = a_4 + 5 = 11 + 5 = 16,$

(2)觀察規則 $a_1 = 2, \quad a_n = a_{n-1} + n, \quad n \ge 2, n \in N$

14-4、數列{ a_n }定義 $a_1 = 1, a_{n+1} = 1 + \frac{2}{3}a_n,\ n \in N$ ，試求

(1)一般項 a_n 。 (2) $\lim\limits_{x\to\infty} a_n$ 。

$\boxed{\text{答案}}$：(1) $a_n = -2 \cdot (\frac{2}{3})^{n-1} + 3$; (2) 3

$\boxed{\text{解析}}$：

(1) $a_n = 1 + \frac{2}{3}a_{n-1} \Rightarrow$ 設 $a_n + k = \frac{2}{3}(a_{n-1} + k)$

$$a_n = \frac{2}{3}a_{n-1} - \frac{1}{3}k \Rightarrow -\frac{1}{3}k = 1, \quad k = -3$$

$$a_n - 3 = \frac{2}{3}(a_{n-1} - 3)$$

$$a_2 - 3 = \frac{2}{3}(a_1 - 3)$$

$$a_3 - 3 = \frac{2}{3}(a_2 - 3)$$

$$a_4 - 3 = \frac{2}{3}(a_3 - 3)$$

$$\vdots \qquad \vdots$$

$$+)\ a_n - 3 = \frac{2}{3}(a_{n-1} - 3)$$

$$a_n - 3 = (\frac{2}{3})^{n-1}(a_1 - 3) \Rightarrow a_n = -2 \cdot (\frac{2}{3})^{n-1} + 3$$

(2) $\lim\limits_{x\to\infty} a_n = \lim\limits_{x\to\infty}[-2 \cdot (\frac{2}{3})^{n-1} + 3] = -2 \cdot 0 + 3 = 3$

14-5、一個邊長爲 n 的大正方形，共有 n^2 個單位正方形，如果每個單位正方形的邊都是一根火柴棒，試求 (1) 一般項 a_n ， (2)試求 a_{30} 值。

$\boxed{\text{答案}}$：(1) $a_n = 2n(n+1), \quad n \in N$ (2) $a_{30} = 1860$

$\boxed{\text{解析}}$：

(1) $a_1 = 4; \quad a_2 = a_1 + 2 \times 4; \quad a_3 = a_2 + 2 \times 3; \quad ....$

$\Rightarrow a_n = a_{n-1} + 2n$

$$
\begin{array}{l}
a_2 = a_1 + 2\times 4 \\
a_3 = a_2 + 2\times 6 \\
a_4 = a_3 + 2\times 8 \\
\vdots \qquad\quad \vdots \\
\underline{+)\, a_n = a_{n-1} + 2\times 2n} \\
a_n = a_1 + 2(4+6+8+........+2n) = 4(1+2+3+......+n) = 2n(n+1)
\end{array}
$$

(2) $a_{30} = 2\times 30\times 31 = 1860$