高雄市明誠中學 高二數學平時測驗 日期：100.04.27					
範圍	2-5 二項式定理	班級	二年____班	姓名	
		座號			

一、填充題(每題 10 分)

1、 $[(a-2b)^2-3c]^5$ 展開式中,$a^3b^3c^2$ 項的係數爲______.

答案：-14400

解析：$[(a-2b)^2-3c]^5=\sum_{k=0}^{5}C_k^5[(a-2b)^2]^{5-k}\cdot(-3c)^k \Rightarrow$ 一般項 $(a-2b)^{10-2k}(-3)^k\cdot c^k$

故含有 c^2 的項取 $k=2\Rightarrow C_2^5(a-2b)^6(-3)^2c^2=9\cdot C_2^5[\sum_{r=0}^{6}C_r^6\cdot a^{6-r}\cdot(-2b)^r]c^2$

故 $a^3b^3c^2$ 之項取 $r=3\Rightarrow 9\cdot C_2^5\cdot C_3^6\cdot a^3\cdot(-2b)^3\cdot c^2=9\cdot C_2^5\cdot C_3^6\cdot(-2)^3\cdot a^3b^3c^2$

其係數 $=9\cdot C_2^5\cdot C_3^6\cdot(-2)^3=9\times10\times20\times(-8)=-14400$.

2、 $\left(2x^2-\frac{3}{x}\right)^6$ 展開式中,(1)常數項=______. (2) x^5 的係數爲______., (3)各項係數和爲______.

答案：(1)4860, (2)0, (3) 1

解析：$\left(2x^2-\frac{3}{x}\right)^6$ 展開式中，一般項爲 $C_r^6(2x^2)^{6-r}\left(-\frac{3}{x}\right)^r=C_r^6\cdot2^{6-r}\cdot(-3)^r\cdot x^{12-3r}$,

(1)當 $12-3r=0\Rightarrow r=4$,故常數項爲 $C_4^6\times2^2\times(-3)^4=4860$.

(2)當 $12-3r=5\Rightarrow r=\frac{7}{3}$(不合),即無 x^5 項，故 x^5 的係數 $=0$.

(3) $x=1$ 代入，各項係數和爲 $(2-\frac{3}{1})^6=1$

3、 $\left(2x^2+\frac{3}{2x}\right)^6$ 展開式中的常數項=__________,而 $\left(2x^2-\frac{3}{2x}\right)^6$ 展開式中，係數爲負數的項共有__________項.

答案：$\frac{1215}{4}$, 3

解析：設 $\left(2x^2+\frac{3}{2x}\right)^6$ 展開式

一般項爲 $C_r^6(2x^2)^{6-r}\left(\frac{3}{2x}\right)^r=C_r^6\cdot2^{6-r}\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^r\cdot(x^2)^{6-r}\cdot(x^{-1})^r=C_r^6\cdot2^{6-r}\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^r x^{12-3r}$

常數項 $\Rightarrow 12-3r=0$, 取 $r=4$,常數項爲 $C_4^6 2^2\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^4=\frac{1215}{4}$.

$\left(2x^2-\frac{3}{2x}\right)^6$ 係數爲負數的項爲 $C_r^6(2x^2)^{6-r}\left(\frac{-3}{2x}\right)^r=C_r^6\cdot2^{6-r}\cdot\left(\frac{-3}{2}\right)^r x^{12-3r}$ 中, r 爲奇數的項的個數，即 $r=1,3,5$, 所以，共有 3 項係數是負數.

4、 $(x+y+z+u)^{10}$ 展開式中，

(1)所有不同類項有____項. (2) $x^3y^3z^2u^2$ 項的係數爲____.(3) $x^4y^3z^3$ 的同型項共有____項.

答案：(1)286, (2)25200, (3)12

解析：(1)展開式中一般項爲 $\dfrac{10!}{a!b!c!d!}x^ay^bz^cu^d$,其中 $a+b+c+d=10$

a, b, c, d 爲非負整數，故有 $H_{10}^4=C_{10}^{13}=286$ 項.

(2) $x^3y^3z^2u^2$ 項之係數 $=\dfrac{10!}{3!3!2!2!}=25200$.

(3) $x^4y^3z^3$ 的同型項共有 $C_3^4\times\dfrac{3!}{2!}=12$ 項.

5、 若 $C_5^m=C_3^m$,則 $C_0^m+C_1^m+C_2^m+\cdots+C_m^m=$______.

答案：256

解析：若 $C_5^m=C_3^m$,則 $m=5+3=8$, $\because(1+x)^8=C_0^8+C_1^8x+C_2^8x^2+\cdots+C_8^8x^8$,

設 $x=1$,得 $C_0^8+C_1^8+C_2^8+\cdots+C_8^8=2^8=256$.

6、 $(1+x+x^2)^8$ 展開式中, x^6 項的係數爲______.

答案：784

解析： $(1+x+x^2)^8$ 的一般項爲 $\dfrac{8!}{p!q!r!}1^p(x)^8(x^2)^r=\dfrac{8!}{p!q!r!}x^{q+2r}$,其中 $p+q+r=8$,

求 x^6 項的係數 $\Rightarrow\begin{cases}q+2r=6\\p+q+r=8\end{cases}$ 之非負整數解 $\Rightarrow$

p	5	4	3	2
q	0	2	4	6
r	3	2	1	0

,

$\therefore$ 係數 $=\dfrac{8!}{5!3!}+\dfrac{8!}{4!2!2!}+\dfrac{8!}{3!4!1!}+\dfrac{8!}{2!6!}=784$.

7、 求 $1+\dfrac{1}{3}C_1^n+\dfrac{1}{9}C_2^n+\cdots+\dfrac{1}{3^n}C_n^n=$______.

答案： $\left(\dfrac{4}{3}\right)^n$

解析： $1+\dfrac{1}{3}C_1^n+\dfrac{1}{9}C_2^n+\cdots+\dfrac{1}{3^n}C_n^n=C_0^n1^n+C_1^n1^{n-1}\cdot\dfrac{1}{3}+C_2^n1^{n-2}\cdot\left(\dfrac{1}{3}\right)^2+\cdots+C_n^n\left(\dfrac{1}{3}\right)^n=\left(1+\dfrac{1}{3}\right)^n=\left(\dfrac{4}{3}\right)^n$.

8、 將 $(1-x)+(1-x)^2+(1-x)^3+\cdots+(1-x)^{20}$ 乘開合併同類項後, x^2 的係數爲______, x^4 的係數爲______.

答案：1330,20349

解析： $(1-x)+(1-x)^2+\cdots+(1-x)^{20}=\dfrac{(1-x)[1-(1-x)^{20}]}{1-(1-x)}=\dfrac{(x-1)^{21}-x+1}{x}$,

其中, x^2 項的係數就是 $(x-1)^{21}$ 中 x^3 項的係數，即 $C_{18}^{21}\cdot x^3(-1)^{18}$,所求 x^2 係數爲 $C_3^{21}=1330$,

x^4 項的係數就是 $(x-1)^{21}$ 中 x^5 項的係數，此項爲 $C_{16}^{21}x^5(-1)^{16}$, x^4 係數爲 $C_5^{21}=20349$.

9、 11^{15} 除以 100 的餘數爲______.

答案：51

解析： $11^{15}=(10+1)^{15}=\underbrace{C_{15}^{15}\times10^{15}+C_{14}^{15}\times10^{14}+\cdots+C_2^{15}\times10^2}_{\text{皆爲100的倍數}}+\boxed{C_1^{15}\times10+C_0^{15}}$,

末兩項 $C_1^{15}\times 10+C_0^{15}=151$ 除以 100 的餘數爲 51. $\Leftarrow$ 即末二位

10、在 $(\sqrt{2}+\sqrt[4]{3})^{100}$ 之展開式中是有理數的共有______項.

$\boxed{\text{答案}}$：26

$\boxed{\text{解析}}$：$(\sqrt{2}+\sqrt[4]{3})^{100}$ 的一般項爲 $C_k^{100}\cdot(\sqrt{2})^{100-k}\cdot(\sqrt[4]{3})^k$,

在 0, 1, 2, 3,…, 100 的數中, k 爲 4 的倍數即可，故共有 26 個.

11、多項式 (x^2+2x+3) 除 $(x^2+3x+2)^3$ 的餘式爲______.

$\boxed{\text{答案}}$：$10x+14$

$\boxed{\text{解析}}$：$(x^2+3x+2)^3=[(x^2+2x+3)+(x-1)]^3$

$$=\boxed{C_3^3(x^2+2x+3)^3+C_2^3(x^2+2x+3)^2(x-1)+C_1^3(x^2+2x+3)(x-1)^2}+C_0^3(x-1)^3,$$

$\Uparrow$

x^2+2x+3 的倍式，

又 $(x-1)^3=x^3-3x^2+3x-1=(x-5)(x^2+2x+3)+(10x+14)$ $\Leftarrow$ 除法原理

故 (x^2+2x+3) 除 $(x^2+3x+2)^3$ 的餘式爲 $(10x+14)$.

12、設多項式 $(1+x)^n=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\cdots+a_nx^n$,若 $a_4:a_{n-6}=3:2$,則 $n=$______.

$\boxed{\text{答案}}$：9

$\boxed{\text{解析}}$：$$\frac{a_4}{a_{n-6}}=\frac{C_4^n}{C_{n-6}^n}=\frac{\dfrac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{4!}}{\dfrac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)}{6!}}=\frac{30}{(n-4)(n-5)}=\frac{3}{2}$$

$\Rightarrow (n-4)(n-5)=20\Rightarrow n=9$ (0 不合).

13、設 $1-\frac{1}{3}\times C_1^n+-\left(\frac{1}{3}\right)^2\times C_2^n+\left(-\frac{1}{3}\right)^3\times C_3^n+\cdots+\left(-\frac{1}{3}\right)^n\times C_n^n<\frac{1}{5000}$,則 n 的最小自然數爲___.

$\boxed{\text{答案}}$：22

$\boxed{\text{解析}}$：$(1+x)^n=1+C_1^nx+C_2^nx^2+C_3^nx^3+\cdots+C_n^nx^n$

設 $x=-\frac{1}{3}$,得 $\left(1-\frac{1}{3}\right)^n=1-\frac{1}{3}\times C_1^n+\left(-\frac{1}{3}\right)^2\times C_2^n+\cdots+\left(-\frac{1}{3}\right)^n\times C_n^n\Rightarrow\left(\frac{2}{3}\right)^n<\frac{1}{5000}$ (取對數)

$\Rightarrow n(\log 2-\log 3)<\log 2-4,\Rightarrow n>\dfrac{4-0.3010}{0.4771-0.301}\doteqdot 21.\cdots$ n 的最小自然數爲 22.

14、$n\in\mathbb{N}$ 且 $C_1^n+2C_2^n+3C_3^n+\cdots+nC_n^n=11264$,求 $n=$______.

$\boxed{\text{答案}}$：$n=11$

$\boxed{\text{解析}}$：設 $S=C_1^n+2C_2^n+3C_3^n+\cdots+(n-1)C_{n-1}^n+nC_n^n$,

反寫：$S=nC_0^n+(n-1)C_1^n+(n-2)C_2^n+\cdots+C_{n-1}^n$,

兩式相加得 $2S=n(C_0^n+C_1^n+\cdots+C_n^n)=n\cdot 2^n\Rightarrow S=n\cdot 2^{n-1}=11264=2^{10}\cdot 11\Rightarrow n=11$.

15、求 $(2x-1)^4(x+3)^5$ 展開式中, x^7 項之係數爲______.

$\boxed{\text{答案}}$：984

$\boxed{\text{解析}}$：$(2x-1)^4(x+3)^5=[(-1)+2x]^4(3+x)^5$

$=[C_0^4(-1)^4+C_1^4(-1)^3(2x)+C_2^4(-1)^2(2x)^2+C_3^4(-1)^1(2x)^3+C_4^4(2x)^4]\cdot$

$[C_0^5 3^5+C_1^5 3^4\cdot x+C_2^5 3^3 x^2+C_3^5 3^2 x^3+C_4^5 3x^4+C_5^5 x^5]$

x^7 項之係數爲 $C_2^4C_5^5(-1)^2 2^2+C_3^4C_4^5(-1)2^3 3+C_4^4C_3^5 2^4 3^2=24-480+1440=984$.

16、$(1+x)(2+x)(3+x)\cdots\cdots(10+x)$ 展開式中, x^8 項的係數＝______.

$\boxed{答案}$：1320

$\boxed{解析}$： x^8的係數爲 10 個括號中有 8 個括號取 x,另 2 個括號取常數相乘，

其係數爲 $(1\cdot2+1\cdot3+1\cdot4+\cdots+1\cdot10)+(2\cdot3+2\cdot4+\cdots+2\cdot10)$

$+(3\cdot4+3\cdot5+\cdots+3\cdot10)+\cdots+(8\cdot9+8\cdot10)+(9\cdot10)$

$=\frac{1}{2}\times[(1+2+3+\cdots+10)^2-(1^2+2^2+\cdots+10^2)]=\left(55^2-\frac{10\times11\times21}{6}\right)\frac{1}{2}=1320$.

17、$(a-2b)^5$ 展開式中，b^5 項的係數爲______，a^3b^2 項的係數爲______.

$\boxed{答案}$：(1)-32　(2)40

$\boxed{解析}$：$(a-2b)^5\Rightarrow$一般項 $C_r^5(a)^r(-2b)^{5-r}$

b^5 項$\Rightarrow$取 $r=0$　　係數爲 $C_0^5(-2)^5=-32$,

a^3b^2 項$\Rightarrow$取 $r=3$　係數爲 $C_3^5(-2)^2=40$

18、試求(1) $502^3=$______，(2) $0.98^5=$______.(求到小數點後第五位；以下四捨五入)

$\boxed{答案}$：(1)126506008,　(2) 0.90392

$\boxed{解析}$：(1) $(500+2)^3=(500)^3+3(500)^2\times2+3\times500\times2^2+2^3\ =126506008$

(2) $(1-0.02)^5=1-5\times0.02+10\times(0.02)^2-10\times(0.02)^3+5\times(0.02)^4-(0.02)^5$

$\doteqdot 1-0.1+0.004-0.00008\doteqdot 0.90392$

19、(1)設 $2000<C_0^n+2C_1^n+4C_2^n+\cdots+2^nC_n^n<2500$，則 $n=$______.

(2) $C_3^5+C_4^6+C_5^7+\cdots+C_{16}^{18}=$______.

$\boxed{答案}$：(1)7,　(2)959

$\boxed{解析}$：(1) $C_0^n+2C_1^n+4C_2^n+\cdots+2^nC_n^n=(2+1)^n=3^n$, $2000<3^n<2500$，$n=7$, $3^7=2187$

(2) $C_0^2+C_1^3+C_2^4+C_3^5+C_4^6+C_5^7+\cdots+C_{16}^{18}$

$=C_0^3+C_1^3+C_2^4+C_3^5+C_4^6+C_5^7+\cdots+C_{16}^{18}$

$=C_1^4+C_2^4+C_3^5+C_4^6+C_5^7+\cdots+C_{16}^{18}$

$=\vdots$

$=C_{15}^{18}+C_{16}^{18}$

$=C_{16}^{19}=C_3^{19}=969$

$\Rightarrow(C_0^2+C_1^3+C_2^4)+(C_3^5+C_4^6+\cdots+C_{16}^{18})=969$

$\therefore C_3^5+C_4^6+\cdots\cdots+C_{16}^{18}=969-10=959$

20、(1) $C_0^{10}C_4^5+C_1^{10}C_3^5+C_2^{10}C_2^5+C_3^{10}C_1^5+C_4^{10}C_0^5=$______.

(2) $C_1^{10}+2C_2^{10}+3C_3^{10}+\cdots+10C_{10}^{10}=$______.

$\boxed{答案}$：(1)1365,　(2)5120

$\boxed{解析}$：(1)原式相當於(10 男 5 女選 4 人)$=C_4^{15}=1365 \Leftarrow$

(2)$10\times C_0^9+10\times C_1^9+10\times C_2^9+\cdots+10\times C_9^9=10\times(C_0^9+C_1^9+C_2^9+\cdots+C_9^9)\;=10\times 2^9=5120$

21、設$(ax-1)^9$與$(x-\frac{2}{3})^8$之展開式中的x^3項係數相等，則$a=$ ＿＿＿＿＿＿，

又$(ax-1)^9$展開式中x^3項係數爲＿＿＿＿＿＿.

$\boxed{答案}$：(1)$-\frac{4}{9}$，　(2)$-\frac{1792}{243}$

$\boxed{解析}$：　x^3項係數相等$C_3^9(ax)^3=C_3^8x^3(-\frac{2}{3})^5\Rightarrow 9a^3=6\times(-\frac{2}{3})^5$　$\therefore a=-\frac{4}{9}$

x^3項係數爲$C_3^8(-\frac{2}{3})^5=-\frac{1792}{243}$

22、(1)$(x+1)^2$除$x^9-10x+1$之餘式爲＿＿＿＿.

(2)$(x+1)^3$除$x^9-10x+1$之餘式爲＿＿＿＿.

$\boxed{答案}$：(1)$-x+9$，　(2) $36x^2-73x-27$

$\boxed{解析}$：設$y=x+1$　$\therefore x=y-1\therefore x^9-10x+1=(y-1)^9-10(y-1)+1$

$=y^3\cdot Q(y)+C_2^9(-1)^7y^2+C_1^9(-1)^8y+C_0^9(-1)^9y^0-10y+10+1$

$=y^3\cdot Q(y)-36y^2+9y-1-10y+11=y^3Q(y)-36y^2-y+10$

$\therefore(x^9-10x+1)$除以$(x+1)^2$之餘式爲$-(x+1)+10=-x+9$

$(x^9-10x+1)$除以$(x+1)^3$之餘式爲$-36(x+1)^2-(x+1)+10=36x^2-73x-27$

23、$[(a+b)^2+c]^7$之展開式中，相異項共有＿＿＿＿項，又$a^6b^4c^2$之係數爲＿＿＿＿.

$\boxed{答案}$：(1)128,　(2)4410

$\boxed{解析}$：$[(a+b)^2+c]^7=C_0^7(a+b)^{14}+C_1^7(a+b)^{12}c+C_2^7(a+b)^{10}c^2+\ldots\ldots+C_6^7(a+b)^2c^6+C_7^7c^7$

相異項；$H_{14}^2+H_{12}^2+H_{10}^2+\cdots+H_0^2=C_{14}^{15}+C_{12}^{13}+C_{10}^{11}+\cdots+C_0^1=128$

$a^6b^4c^2$之係數爲$C_2^7\cdot C_6^{10}=4410$

24、以$(x+1)^2$除x^{10}，餘式是＿＿＿＿.

$\boxed{答案}$：$-10x-9$

$\boxed{解析}$：$x^{10}=[(x+1)-1]^{10}=(x+1)^{10}-C_1^{10}(x+1)^9+\cdots+C_8^{10}(x+1)^2-C_9^{10}(x+1)+C_{10}^{10}$

$\therefore x^{10}$除以$(x+1)^2$的餘式(剩最後兩項)$=-C_9^{10}(x+1)+1=-10x-9$.

25、已知$\log 2=0.3010$，$\log 3=0.4771$，則滿足$1-\frac{1}{3}C_1^n+(-\frac{1}{3})^2C_2^n+\cdots+(-\frac{1}{3})^nC_n^n<\frac{1}{5000}$的最小正整數$n=$＿＿＿＿.

$\boxed{答案}$：22

$\boxed{解析}$：$1-\frac{1}{3}C_1^n+(-\frac{1}{3})^2C_2^n+\cdots+(-\frac{1}{3})^nC_n^n=[1+(-\frac{1}{3})]^n=(\frac{2}{3})^n$

$\therefore(\frac{2}{3})^n<\frac{1}{5000}$(同取 log)，$\therefore n(\log 2-\log 3)<-\log 5000$，$n(0.3010-0.4771)<-3.699$

$\therefore n>\frac{3.699}{0.1761}=21.\cdots$，$\therefore n=22$.