

高雄市明誠中學 高二數學平時測驗					日期：100.05.19	
範圍	2-3,4 排列、組合	班級	二年____班	姓名		
		座號				

一、填充題 (每題 10 分)

9-1、5 位男生，5 位女生排成一列，試求：

(1)女生不全相鄰，則有_____種排法。(2)女生全不相鄰，則有_____種排法。

答案：(1)345600、(2)43200

解析：

(1)女生完全相鄰：

將 4 位女生綁成一體，與 5 位男生排列 6!且 4 位女生再排 4! 共 $6! \times 4! = 17280$

女生不全相鄰即(全部排列)－(女生完全相鄰) = $9! - 17280 = 362880 - 17280 = 345600$

(2) 5 位男生先排列 5!，再將 4 位女生插入 5 位男生間及兩旁的空隙 P_4^6

$$5! \times P_4^6 = 120 \times 360 = 43200$$

9-2、5 男 5 女參加一個化妝舞會，

(1)當跳第一首曲子時，男女配對，試求配對方法數_____。

(2)當換到第二首曲子時，男女重新配對，每個人都必須交換舞伴，試求配對方法數_____。

答案：(1)120, (2)44

解析：

(1) 女生 5 人站成一列，5 名男生在女生前排列挑選五件 $5! = 120$

(2) 男女重新配對，每個人都必須交換舞伴即 5 個人的錯排

$$C_0^5 5! - C_1^5 4! + C_2^5 3! - C_3^5 2! + C_4^5 1! - C_5^5 0! = 120 - 120 + 60 - 20 + 5 - 1 = 44$$

9-3、「人外有人天外有天」8 個字排成一列，

(1)試求排列數_____。

(2)若兩個「人」字相鄰，兩個「天」字相鄰，但「人」與「天」不相鄰，試求排列數_____種。

答案：(1)2520 (2)120

解析：

(1)8 個字中有：人 $\times 2$ 、外 $\times 2$ 、有 $\times 2$ 、天 $\times 2 \Rightarrow$ 直線排列數： $\frac{8!}{2!2!2!2!} = 2520$

(2)先排外 $\times 2$ 、有 $\times 2$ ，再將 **人人**、**天天** 排入外 $\times 2$ 、有 $\times 2$ 所造成 5 個空隙： $\frac{4!}{2!2!} \times P_2^5 = 120$

9-4、將 a, b, c, d, e, f, i, j 等 8 個英文字母排成一列，則

(1)若母音不全相鄰，試求排列數_____。

(2)若所有的母音與子音都保持其在英文字母中的順序，試求排列數_____。

答案：(1)36000；(2)56

解析：

(1)子音： a, b, c, d, f ；母音： e, i, j

子音 a, b, c, d, f ，與母音 e, i, j 先排 $6! \times 3! = 4320$

母音不全相鄰即(全部排列) - (母音完全相鄰) = $8! - 4320 = 36000$

(2) $\circ \circ \circ \circ \circ \square \square \square$ 的排列 $\frac{8!}{5!3!} = 56$ ，

其中 5 個 \circ 依序排入子音 a, b, c, d, f ，3 個 \square 依序排入母音： e, i, j

9-5、有 6 封不同的信件，要投入甲乙丙丁 4 個不同的郵筒

(1) 試求有 _____ 種投法。

(2) 若規定甲、乙、丙 3 個郵筒每個均至少投一封，試求有 _____ 種投法。

答案：(1)4096 (2)2100

解析：

$$(1) 4^6 = 4096$$

$$(2) C_0^3 4^6 - C_1^3 3^6 + C_2^3 2^6 - C_3^3 1^6 = 4096 - 2187 + 192 - 1 = 2100$$

10-1、甲、乙、丙、丁、戊、己六人排成一列，

(1) 若甲、乙、丙三人中恰有二人相鄰，試求排列數 _____。

(2) 若甲不排前二位、且乙、丙不排末位，試求排列數 _____。

答案：(1)432 (2)336

解析：

(1) 甲、乙、丙三人中恰有二人相鄰，如 $\boxed{\text{甲乙}}$ 、 $\boxed{\text{丙}}$ 插入丁、戊、己排列所造成的 4 個空隙且 $\boxed{\text{甲乙}}$ 再排列一次 $C_2^3 (3! \times P_2^4 \times 2!) = 432$

(2) ① 甲排末： $1 \times 5! = 120$

② 甲不排末：因為甲不排前二位只能排第 3,4,5 位，末位只能排丁、戊、己三人 $\Rightarrow 3 \times 3 \times 4! = 216$

① + ② $\Rightarrow 120 + 216 = 336$

10-2、(1) 一籃雞蛋有 20 個，每次拿 2 個或 3 個恰好可以拿完，試求有 _____ 種拿法。

(2) 某警報器以鳴叫長短音的排列當作信號，已知短音 1 秒，長音 2 秒，每鳴叫一次間隔 1 秒，若信號長度 21 秒，試求可做出 _____ 種不同的信號。

答案：(1)114；(2)200

解析：

(1) 設拿 2 個 x 次，拿 3 個 y 次，則 $2x + 3y = 20 \Rightarrow (x, y) = (10, 0), (7, 2), (4, 4), (1, 6)$ 等 4 組

$$\text{共有 } \frac{10!}{10!} + \frac{9!}{7!2!} + \frac{8!}{4!4!} + \frac{7!}{6!} = 1 + 36 + 70 + 7 = 114$$

(2) 設短音 x 次，長音 y 次，間隔 $(x + y - 1)$ 次，則 $x + 2y + (x + y - 1) = 21 \Rightarrow 2x + 3y = 22$

非負整數解 $(x, y) = (11, 0), (8, 2), (5, 4), (2, 6)$ 等 4 組

$$\text{共有 } \frac{11!}{11!} + \frac{10!}{8!2!} + \frac{9!}{5!4!} + \frac{8!}{2!6!} = 1 + 45 + 126 + 28 = 200$$

10-3、5 件不同的物品，分給甲、乙、丙、丁 4 人，

(1)任意分，每人可兼得，試求分配方法_____種。

(2)甲至少一件，乙恰好 1 件，試求分配方法_____種。

答案：(1)1024；(2)325

解析：

(1) $4^5 = 1024$

(2)挑一件給乙，剩餘甲至少一件(全部—甲無)： $C_1^5(3^4 - 2^4) = 325$

10-4、主人夫婦與賓客夫婦四對共十人圍一圓桌而坐，試求下列方法數：

(1)夫婦相鄰 _____種。

(2)男女相間且夫婦不全相鄰 _____種。

答案：(1)768 (2)2832

解析：

(1) **主人夫婦**及其餘四對夫婦的環狀排列且每對夫婦可互換： $\frac{5!}{5} \times 2^5 = 4 \times 32 = 768$

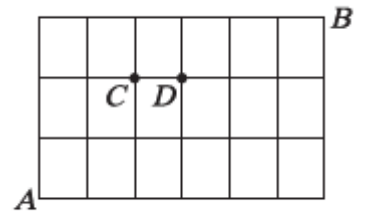
(2) 男女相間且夫婦不全相鄰 即 (男女相間排列) - (男女相間排列且夫婦相鄰)

$$\frac{5!}{5} \times 5! - \frac{5!}{5} \times 2 = 2880 - 48 = 2832$$

11-1、右圖為棋盤式街道，若限制行進方向只能向右或向上

(1)試求由 A 走到 B 的捷徑數為_____。

(2)試求由 A 走到 B，但不通過街道 \overline{CD} 的捷徑數為_____。



答案：(1)84；(2)60

解析：

(1)(6 個 \rightarrow)及(3 個 \uparrow)的排列： $\frac{(6+3)!}{6!3!} = 84$

(2)由 A $\rightarrow \overline{CD} \rightarrow B$ ： $\frac{(2+2)!}{2!2!} \times 1 \times \frac{(3+1)!}{3!} = 24$

由 A 走到 B，但不通過 \overline{CD} ：全 - (由 A 走到 B，且通過 \overline{CD})即 $\frac{(6+3)!}{6!3!} - 24 = 60$

11-2、甲、乙.....等 9 人分乘 3 輛同型的汽車，依下列各情形：

(1)不區分汽車，每車 3 人且甲、乙同車 _____

(2)汽車區分為 A、B、C，每車 3 人且甲、乙同車 _____

答案：(1)70；(2)420

解析：

(1)將甲乙以外的 7 人分成 1、3、3 三組乘車(不區分汽車)： $\frac{C_1^7 C_3^6 C_3^3}{2!} \times \frac{3!}{3!} = 70$

(2)將甲乙以外的 7 人分成 1、3、3 三組乘車排列入 A、B、C： $\frac{C_1^7 C_3^6 C_3^3}{2!} \times 3! = 420$

11-3、將 12 本不同的書按下列方式分配，是求其方法

(1)分給甲乙丙三人，甲得 6 本、乙、丙各得 3 本。 _____

(2)裝入三個相同的袋子，一袋裝 6 本，其餘兩袋個裝 3 本。 _____

答案：(1)18480；(2)9540

解析：

$$(1) \text{分堆再給人} : \frac{C_6^{12} C_3^6 C_3^3}{2!} \times 1 \times 2! = 18480$$

$$(2) \text{分堆} : \frac{C_6^{12} C_3^6 C_3^3}{2!} \times \frac{3!}{3!} = 9540$$

11-4、(1)設一班捷運有 8 節不同車廂，現有 3 男 3 女同時上車，試求此 6 人剛好選坐 3 節車廂，且此 6 人在這 3 節車廂中恰好都是 1 男 1 女的方法數。 _____

(2)學校將 7 個轉學生編入 4 個不同班級，每班至少 1 人，試求編入的方法？ _____ 種

答案：(1)2016；(2)8400

解析：

$$(1) \text{先由 8 節車廂選 3 節排入 3 男、3 女} : C_3^8 \times 3! \times 3! = 2016$$

$$(2) \text{方法一} : C_0^4 4^7 - C_1^4 3^7 + C_2^4 2^7 - C_3^4 1^7 + C_4^4 0^7 = 8400$$

方法二：分成 (1,1,1,4), (1,1,2,3), (1,2,2,2) 四組再排列至各班

$$\begin{cases} (1,1,1,4) \Rightarrow \frac{C_1^7 C_1^6 C_1^5 C_4^4}{3!} \times 4! = 840 \\ (1,1,2,3) \Rightarrow \frac{C_1^7 C_1^6 C_2^5 C_3^3}{2!} \times 4! = 5040 \\ (1,2,2,2) \Rightarrow \frac{C_1^7 C_2^6 C_2^4 C_2^2}{3!} \times 4! = 2520 \end{cases} \Rightarrow 840 + 5040 + 2520 = 8400$$

12-1、有 5 個人到一家冰店吃冰，此冰店只賣 3 種冰，若每人只選一種冰來吃，試求：

(1)此 5 人吃冰的方法數 _____。

(2)冰店老闆賣冰的方法數 _____。

答案：(1)243；(2)21

解析：

$$(1) 3^5 = 243$$

$$(2) 3 \text{ 種冰共 5 碗} \Rightarrow H_5^3 = C_5^7 = 21$$

12-2、將 8 顆球放入 3 個箱子中，每箱最多放 8 顆球，亦可能為空箱，試問：

(1)球相同，箱子相異，有 _____ 種方法。

(2)球相異，箱子相同，有 _____ 種方法。

答案：(1)45；(2)1094

解析：

$$(1) \text{四個箱子分別裝有 } x, y, z, t \text{ 個，則 } x + y + z + t = 8 \Rightarrow H_8^3 = C_8^{10} = C_2^{10} = 45$$

- (2) 分成(0,0,8), (0,1,7), (0,2,6), (0,3,5), (0,4,4),
 (1,1,6), (1,2,5), (1,3,4), (2,2,4), (2,3,3)十組再放至各箱(不區分)

$$\left\{ \begin{array}{l} (0,0,8) \Rightarrow C_8^8 = 1 \\ (0,1,7) \Rightarrow C_1^8 C_7^7 = 8 \\ (0,2,6) \Rightarrow C_2^8 C_6^6 = 28 \\ (0,3,5) \Rightarrow C_3^8 C_5^5 = 56 \\ (0,4,4) \Rightarrow \frac{C_4^8 C_4^4}{2!} = 35 \end{array} \right. , \left\{ \begin{array}{l} (1,1,6) \Rightarrow \frac{C_1^8 C_1^7 C_6^6}{2!} = 28 \\ (1,2,5) \Rightarrow C_1^8 C_2^7 C_5^5 = 168 \\ (1,3,4) \Rightarrow C_1^8 C_3^7 C_4^4 = 280 \\ (2,2,4) \Rightarrow \frac{C_2^8 C_2^6 C_4^4}{2!} = 210 \\ (2,3,3) \Rightarrow \frac{C_2^8 C_3^6 C_3^3}{2!} = 280 \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow 1+8+28+56+35+28+168+280+210+280 = 1094$$

12-3、8 枝相同的鉛筆和 6 枝相同的橡皮擦，依下列方式任意分給 4 人，試求方法數：

- (1)每人至少得一枝鉛筆及一個橡皮擦_____
- (2)每人至少得一枝鉛筆或一個橡皮擦_____

答案：(1)350；(2)9194

解析：

(1)分 8 枝相同的鉛筆給四人 H_8^4 ；分 6 枝相同的橡皮擦給四人 H_6^4

$$\text{每人至少得一枝鉛筆及一個橡皮擦 } H_{8-1-1-1-1}^4 \times H_{6-1-1-1-1}^4 = H_4^4 \times H_2^4 = C_4^7 \times C_2^5 = 350$$

$$(2) C_0^4 H_8^4 \times H_6^4 - C_1^4 H_8^3 \times H_6^3 + C_2^4 H_8^2 \times H_6^2 - C_3^4 H_8^1 \times H_6^1 + C_4^4 H_8^0 \times H_6^0 \\ = 165 \times 84 - 4 \times 45 \times 28 + 6 \times 9 \times 7 - 4 \times 1 \times 1 + 0 = 9194$$

12-4、試求：(1)不等式 $x+y+z+u \leq 10$ 的非負整數解組數

(2) $x+y+z+u \leq 10$ 的正整數解組數

答案：(1)1001；(2)210

解析：

$$(1) x+y+z+u \leq 10 \Rightarrow x+y+z+u+T=10 \text{ 的非負整數解： } H_{10}^5 = C_{10}^{14} = 1001$$

$$(2) x+y+z+u \leq 10 \Rightarrow x+y+z+u+T=10 \text{ 的正整數解： } H_{10-1-1-1-1}^5 = H_6^5 = 210$$