高雄市明誠中學 高二數學平時測驗 日期：100.04.13					
範圍	1-5 圓錐曲線的光學性質(2)	班級	二年____班	姓名	
		座號			

一、填充題 (每題 10 分)

1、 (1)設一光線由橢圓$\Gamma: 9x^2+36x+4y^2-8y-32=0$一焦點出發，經橢圓兩次反射後回到該焦點，試求光線所經距離？

(2)設 $\Gamma: 2x^2-4y^2+8x+24y-30=0$，試求為何種圓錐曲線？並求過點$(-1,3)$的切線

答案： (1)$12\sqrt{2}$ 、(2)雙曲線、 $x=-1$

解析：(1)配方Γ的方程式為$\dfrac{(x+2)^2}{8}+\dfrac{(y-1)^2}{18}=1 \Rightarrow a=\sqrt{18}$.

全長$(\overline{FP}+\overline{PF'})+(\overline{F'Q}+\overline{QF})=2a+2a=2\sqrt{18}+2\sqrt{18}=12\sqrt{2}$.

(2) 配方$\Gamma: 2x^2-4y^2+8x+24y-30=0 \Rightarrow \dfrac{(x+2)^2}{1}-\dfrac{(y-3)^2}{\frac{1}{2}}=1 \Rightarrow$ 雙曲線

點$(-1,3)$在圖形上，切線$2\cdot(-1)\cdot x-4\cdot 3\cdot y+8(\dfrac{x-1}{2})+24(\dfrac{y+3}{2})-30=0 \Rightarrow x=-1$

2、 拋物線$y^2=8x$上有一弦，其中點為$(4,-2)$，則(1)此弦之方程式為______________，又(2)其弦長為____________.

答案：(1) $2x+y-6=0$, (2) $2\sqrt{35}$

解析：設此弦與拋物線$y^2=8x$交於$A(x_1,y_1)$, $B(x_2,y_2)$,

$$\Rightarrow (\frac{x_1+x_2}{2},\frac{y_1+y_2}{2})=(4,-2) \Rightarrow \begin{cases} x_1+x_2=8 \\ y_1+y_2=-4 \end{cases}$$

設此弦方程式$y+2=m(x-4) \Rightarrow x=\dfrac{y+4m+2}{m}$代入$y^2=8x$解聯立

$$\Rightarrow \quad y^2=8(\frac{y+4m+2}{m}) \quad \Rightarrow \quad my^2-8y-32m-16=0 \text{ 二根 } y_1,y_2 \text{ 且} \begin{cases} y_1+y_2=-\dfrac{-8}{m}=-4 \\ y_1y_2=\dfrac{-32m-16}{m} \end{cases},$$

$$\frac{8}{m}=-4 \Rightarrow m=-2 \Rightarrow \quad -2y^2-8y+48=0 \Rightarrow y^2+4y-24=0 \text{ 二根 } y_1,y_2 \begin{cases} y_1+y_2=-4 \\ y_1y_2=-24 \end{cases}$$

$$\Rightarrow (y_1-y_2)^2=(y_1+y_2)^2-4y_1y_2=(-4)^2-4\times(-24)=112$$

$\therefore$直線斜率$-2=\dfrac{y_1-y_2}{x_1-x_2} \Rightarrow x_1-x_2=\dfrac{1}{-2}(y_1-y_2)$

$\therefore$弦長$\overline{AB}=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}=\sqrt{\dfrac{5}{4}(y_1-y_2)^2}=\dfrac{\sqrt{5}}{2}\times\sqrt{112}=2\sqrt{35}$

3、 (1)試求通過拋物線上$\Gamma: x^2=-8y$一點$P(4,-2)$的切線方程式為？

(2)過點$P(1,-3)$作與橢圓$9x^2+4y^2=36$相切的直線方程式為？

$\boxed{答案}$：(1) $x+y-2=0$ ，(2) $2x-y-5=0$， $y+3=0$

$\boxed{解析}$：(1)切點$P(4,-2)\Rightarrow 4x=-8(\frac{y-2}{2})\Rightarrow x+y-2=0$

(2) $9x^2+4y^2=36\Rightarrow \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$,橢圓切線為$y=mx\pm\sqrt{4m^2+9}$ ，

代入$P(1,-3)$得$-3=m\pm\sqrt{4m^2+9}\Rightarrow(-m-3)^2=4m^2+9$ ，

$m(m-2)=0\Rightarrow m=0,2$ $\therefore$切線為$y+3=0, y+3=2(x-1)$

即$2x-y-5=0$， $y+3=0$

4、設拋物線$\Gamma: x^2=4y$,有一平行與Γ的軸之光線從點$A(4,10)$射出後，先射到Γ上的點P ，經過反射再射到Γ上的Q點，則P,Q點坐標為__________.

$\boxed{答案}$： $P(4,4), Q\left(-1,\frac{1}{4}\right)$

$\boxed{解析}$：設$P(4,y)$代入$\Gamma: x^2=4y\Rightarrow 16=4y, y=4$, 則$P(4,4)$

$\Gamma: x^2=4y\Rightarrow(x-0)^2=4\cdot1\cdot(x-0)$, 焦點$F(0,1)$

再設$Q(2t,t^2)$ ，又P,F,Q三點共線$\Rightarrow m_{\overline{FP}}=m_{\overline{FQ}}$,

則$\frac{4-1}{4-0}=\frac{1-t^2}{0-2t}\Rightarrow 2t^2-3t-2=0\Rightarrow(2t+1)(t-2)=0$

$\Rightarrow t=2,-\frac{1}{2}$ ，則$P(4,4), Q\left(-1,\frac{1}{4}\right)$