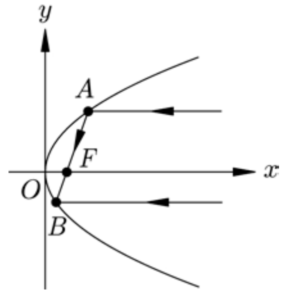
| 高雄市明誠中學 高二數學平時測驗 日期：100.04.13 | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 範圍 | 1-5 圓錐曲線的光學性質 | 班級<br>座號 | 二年____班 | 姓名 | |

一、填充題 (每題 10 分 )

1、 設拋物線$\Gamma: y^2=4x$,與$\Gamma$的軸平行光射向點$A(2,2\sqrt{2})$後，反射到$B$點，再反射出去，則(1) $B$點坐標爲__________.(2)第二次反射後，光所在直線方程式爲______________.
(3)令$O$爲頂點，則$\triangle OAB$的面積爲____________.




答案：(1) $\left(\frac{1}{2},-\sqrt{2}\right)$, (2) $y=-\sqrt{2}$ , (3) $\frac{3\sqrt{2}}{2}$

解析：設$B(t^2,2t)$ ,焦點$F(1,0)$ ,頂點$O(0,0)$ ,

$\because A,F,B$三點共線$\Rightarrow m_{\overline{FA}}=m_{\overline{FB}}$ ,

則$\frac{2\sqrt{2}-0}{2-1}=\frac{2t-0}{t^2-1}\Rightarrow \sqrt{2}t^2-t-\sqrt{2}=0\Rightarrow(\sqrt{2}t+1)(t-\sqrt{2})=0$

$\Rightarrow t=\sqrt{2}$ 或$(-\frac{1}{\sqrt{2}})$,故$B\left(\frac{1}{2},-\sqrt{2}\right)\Leftarrow$取$t=-\frac{1}{\sqrt{2}}$

第二次反射後，光所在直線方程式爲過$B$的水平線$y=-\sqrt{2}$ .

$\because \overrightarrow{OA}=(2,2\sqrt{2}),\overrightarrow{OB}=\left(\frac{1}{2},-\sqrt{2}\right)$,則$\triangle OAB=\frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix}2 & 2\sqrt{2}\\ \frac{1}{2} & -\sqrt{2}\end{vmatrix}\right|=\frac{3\sqrt{2}}{2}$.

2、 設橢圓$\Gamma:\frac{(x-1)^2}{16}+\frac{(y-2)^2}{12}=1$上的點$P(3,5)$ , $F_1,F_2$爲其二焦點，則
(1) $\angle F_1PF_2$的內角平分線方程式爲____________.
(2) $\angle F_1PF_2$的外角平分線方程式爲____________.

答案：(1) $2x-y=1$, (2) $x+2y=13$

解析： $\Gamma:\frac{(x-1)^2}{16}+\frac{(y-2)^2}{12}=1$

過切點$P(3,5)$的切線方程式爲$\frac{(3-1)(x-1)}{16}+\frac{(5-2)(y-2)}{12}=1\Rightarrow x+2y=13$

(1) $\angle F_1PF_2$的內角平分線爲過$P$點的法線，法線方程式爲$2x-y=1$

(2) $\angle F_1PF_2$的外角平分線爲過$P$點的切線，切線方程式爲$x+2y=13$.

3、 設$P(1,-1)$爲橢圓$\Gamma: 5x^2-6xy+5y^2=16$上一點，則
(1)過$P$的切線方程式爲______________.
(2)令$F_1,F_2$爲$\Gamma$的二焦點，則$\angle F_1PF_2$的內角平分線方程式爲____________.

答案：(1) $x-y=2$, (2) $x+y=0$

解析：(1)過切點$P$的切線方程式爲$5\cdot1\cdot x-6[\frac{1\cdot y+x(-1)}{2}]+5(-1)y=16$ ，故切線爲$x-y=2$.

(2) $\angle F_1PF_2$的內角平分線爲過$P$的法線爲$x+y=0$.

4、 設 $F(5,0),\ F'(-5,0)$ 爲橢圓 $\Gamma$ 的兩焦點，直線 $L: x+3y=15$ 爲其一切線，則

(1)把 $L$ 看成一面鏡子，而自焦點 $F$ 射到橢圓 $\Gamma$ 與 $L$ 的交點 $A$(即切點)的光線經 $L$ 反射到 $F'$，則 $A$ 點坐標爲__________，$\Gamma$ 的方程式爲____________.

(2)自 $F$ 與 $F'$ 作切線 $L$ 的垂足分別爲 $H, K$，則梯形 $FHKF'$ 的面積爲_______，周長爲___.

答案：(1)(3, 4), $\dfrac{x^2}{45}+\dfrac{y^2}{20}=1$, (2) $45$, $6\sqrt{10}+10$

解析：(1)作 $F$ 對於 $L$ 的對稱點 $P \Rightarrow (5,0)-2\times\dfrac{5+0-15}{1^2+3^2}\times(1,3)=(7,6)$,

$\overleftrightarrow{PF'}: \dfrac{y-0}{x+5}=\dfrac{0-6}{-5-7} \Rightarrow x-2y=-5$，解 $\begin{cases} x-2y=-5 \\ x+3y=15 \end{cases} \Rightarrow$ 切點 $A(3,4)$.

( $\because P, A, F'$ 三點共線，故 $\overleftrightarrow{PF'}$ 與 $L$ 的交點即爲切點 )

由 $a^2=b^2+c^2 \Rightarrow$ 設 $\Gamma$ 的方程式爲 $\dfrac{x^2}{b^2+25}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$,

過 $A(3,4) \Rightarrow \dfrac{9}{b^2+25}+\dfrac{16}{b^2}=1$ 去分母解得 $b^2=20$，亦即 $a^2=45$, $c^2=25$

$\Gamma$ 的方程式爲 $\dfrac{x^2}{45}+\dfrac{y^2}{20}=1$.

(2) $\cos\angle FAF'=\dfrac{\overrightarrow{AF}\cdot\overrightarrow{AF'}}{|\overrightarrow{AF}|\ |\overrightarrow{AF'}|}=\dfrac{(2,-4)\cdot(-8,-4)}{\sqrt{20}\sqrt{80}}=0 \Rightarrow \angle FAF'=90°$,

梯形 $FHKF'$ 的面積爲 $a^2\sin 90°=45$,

周長爲 $\overline{FF'}+\overline{F'K}+\overline{KH}+\overline{FH}=2a(\cos\dfrac{90°}{2}+\sin\dfrac{90°}{2})+2c=6\sqrt{10}+10$.

5、 設 $F, F'$ 爲雙曲線 $\Gamma: \dfrac{x^2}{16}-\dfrac{y^2}{4}=1$ 的兩焦點, $P(4\sqrt{2},2)$ 爲其上一點，則 $\angle FPF'$ 的內角平分線方程式爲________________.

答案： $\sqrt{2}x-2y=4$

解析： $\angle FPF'$ 的內角平分線，亦即過 $P$ 的切線方程式，即 $\dfrac{4\sqrt{2}x}{16}-\dfrac{2y}{4}=1 \Rightarrow \sqrt{2}x-2y=4$.

6、 試求 $2x^2-7xy+3y^2+3x+y-2=0$ 所表兩直線之銳夾角__________.

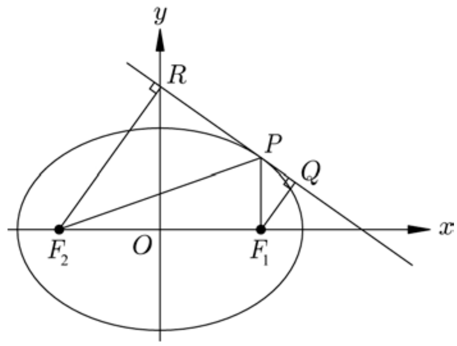
答案： $45°$

解析： $2x^2-7xy+3y^2+3x+y-2=0 \Rightarrow (2x-y-1)(x-3y+2)=0$

$L_1: 2x-y-1=0 \Rightarrow m_1=2$, $\qquad L_2: x-3y+2=0 \Rightarrow m_2=\dfrac{1}{3}$,

$\tan\theta=\pm\dfrac{m_1-m_2}{1+m_1m}=\pm\dfrac{2-\frac{1}{3}}{1+2\cdot\frac{1}{3}}=\pm\dfrac{\frac{5}{3}}{\frac{5}{3}}=\pm1$, $\quad\therefore \theta=45°$ 或 $135°$, $\qquad$ 所求銳夾角爲 $45°$.

7、 如圖所示，橢圓$\Gamma:\dfrac{x^2}{8}+\dfrac{y^2}{4}=1$上一點$P(x_0,y_0)$,過$P$作切線$L:x+\sqrt{2}y=4$,若兩焦點$F_1$、$F_2$在切線$L$上之正射影分別爲$Q$ 、 $R$,則$\triangle PQF_1$與$\triangle PRF_2$的面積比爲_______.




答案：1：9

解析：Sol 一

$\because P(x_0,y_0)$在$\Gamma:x^2+2y^2=8$上，

切線爲$L:x_0x+2y_0y=8$與$L:x+\sqrt{2}y=4$同一直線

$\Rightarrow \dfrac{x_0}{1}=\dfrac{2y_0}{\sqrt{2}}=\dfrac{8}{4}\Rightarrow x_0=2, y_0=\sqrt{2}\Rightarrow P(2,\sqrt{2})$,

又$a^2=8, b^2=4\Rightarrow c=\sqrt{a^2-b^2}=2\Rightarrow F_1(2,0), F_2(-2,0).$

又$\triangle PF_1Q$與$\triangle PF_2R$中，$\angle F_1PQ=\angle F_2PR$(光學性質)，且$\angle PQF_1=\angle PRF_2=90°$,

$\therefore\ \triangle PF_1Q\sim\triangle PF_2R\,(\mathrm{AA}),\ \dfrac{\triangle PQF_1}{\triangle PRF_2}=\left(\dfrac{\overline{PF_1}}{\overline{PF_2}}\right)^2=\dfrac{\sqrt{2}^2}{4^2+\sqrt{2}^2}=\dfrac{2}{18}=\dfrac{1}{9},\ \therefore$所求$1:9.$

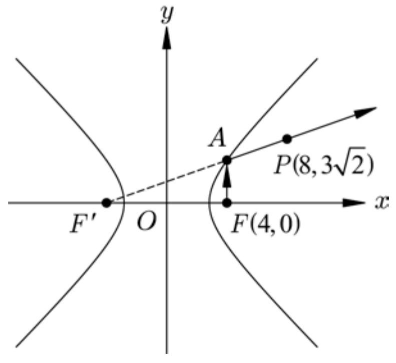
Sol 二

$a^2=8, b^2=4\Rightarrow c=\sqrt{a^2-b^2}=2\Rightarrow F_1(2,0), F_2(-2,0).$

$\triangle PF_1Q$與$\triangle PF_2R$中，$\angle F_1PQ=\angle F_2PR$(光學性質)，且$\angle PQF_1=\angle PRF_2=90°$,

$\therefore\ \triangle PF_1Q\sim\triangle PF_2R\,(\mathrm{AA}),\ \dfrac{\triangle PQF_1}{\triangle PRF_2}=\left(\dfrac{\overline{QF_1}}{\overline{RF_2}}\right)^2=\left(\dfrac{d(F_1,L)}{d(F_2,L)}\right)^2=\left(\dfrac{|2+0-4|}{|-2+0-4|}\right)^2=(\dfrac{1}{3})^2=\dfrac{1}{9}$

8、 已知$A$點在雙曲線$\Gamma:\dfrac{x^2}{8}-\dfrac{y^2}{8}=1$上,若由焦點$F(4,0)$射至$A$點的光線被雙曲線$\Gamma$反射，且反射光通過$P(8,3\sqrt{2})$,則$A$點坐標爲___________.




答案：$(4,2\sqrt{2})$

解析：

取另一焦點$F'(-4,0)$,

依光學性質知$\overleftrightarrow{PF'}:\dfrac{y-0}{x+4}=\dfrac{3\sqrt{2}-0}{8+4}\Rightarrow 4y=\sqrt{2}x+4\sqrt{2}$

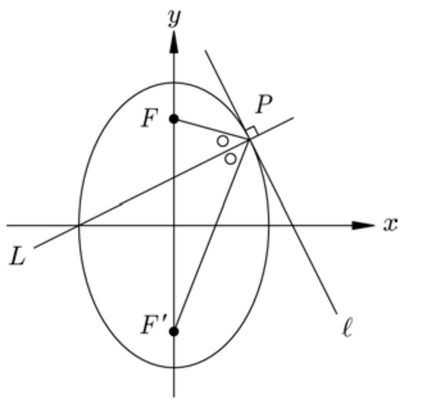
$\Rightarrow y=\dfrac{\sqrt{2}}{4}x+\sqrt{2}$,

代入$\Gamma:x^2-y^2=8$得$x^2-\left(\dfrac{\sqrt{2}}{4}x+\sqrt{2}\right)^2=8\Rightarrow x^2-\left(\dfrac{x^2}{8}+x+2\right)=8\Rightarrow\dfrac{7x^2}{8}-x-10=0$

$\Rightarrow 7x^2-8x-80=0\Rightarrow(x-4)(7x+20)=0\Rightarrow x=4, -\dfrac{20}{7}$(不合)$\Rightarrow y=2\sqrt{2},\ \ A(4,2\sqrt{2}).$

9、 設$F$, $F'$分別爲橢圓$9x^2+4y^2=36$的兩焦點, $P$爲橢圓上任一點，且$\angle FPF'$的平分線斜

率為$\frac{1}{2}$,則過$P$點的切線方程式為________或__________.




答案：$2x+y=5, 2x+y=-5$

解析：

$\angle FPF'$的平分線為法線，其斜率為$\frac{1}{2}$

又切線$\ell$垂直法線$L \Rightarrow m_\ell=-2.$

設切點$P(x_0,y_0) \Rightarrow 9x_0^2+4y_0^2=36$,

且$\ell: 9x_0x+4y_0y=36 \Rightarrow 4y_0y=-9x_0x+36 \Rightarrow y=\left(-\frac{9x_0}{4y_0}\right)x+\frac{9}{y_0}$,

切線斜率$-2=-\frac{9x_0}{4y_0} \Rightarrow y_0=\frac{9}{8}x_0$ , 切點$P(x_0,y_0)=(x_0,\frac{9}{8}x_0)$

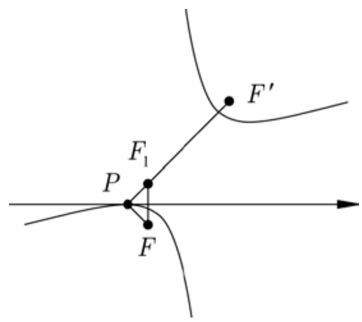
代入橢圓得$9x_0^2+4\left(\frac{9x_0}{8}\right)^2=36 \Rightarrow 9x_0^2+\frac{81x_0^2}{16}=36 \Rightarrow 25x_0^2=64 \Rightarrow x_0^2=\frac{64}{25}$

$\Rightarrow x_0=\frac{8}{5},-\frac{8}{5}$,　　$\therefore y_0=\frac{9}{5},-\frac{9}{5}$. $\therefore P\left(\frac{8}{5},\frac{9}{5}\right)$或$P\left(-\frac{8}{5},-\frac{9}{5}\right)$,

故切線為$9\cdot\frac{8}{5}x+4\cdot\frac{9}{5}y=36$或$9\left(-\frac{8}{5}x\right)+4\left(-\frac{9}{5}y\right)=36$

$\Rightarrow 8x+4y=20$或$-8x-4y=20 \Rightarrow 2x+y=5$或$2x+y=-5.$

10、設一雙曲線的兩焦點為$F(0,-2)$與$F'(8,10)$,又此雙曲線與$x$軸相切，則雙曲線之貫軸長為____________.



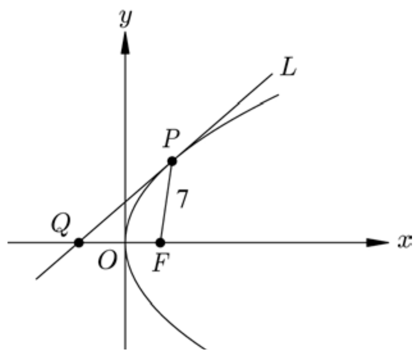

答案：$8\sqrt{2}$

解析：$F(0,-2)$關於切線$x$軸之對稱點$F_1(0,2)$,

依光學性質知$F',F_1,P$三點共線.且

$\therefore \left|\overline{F_1F'}\right|=\left|\overline{PF'}-\overline{PF_1}\right|=\left|\overline{PF'}-\overline{PF}\right|=2a=\sqrt{8^2+8^2}=8\sqrt{2}.$

11、如圖，拋物線$\Gamma: y^2=12x$之焦點為$F$ , $P\in\Gamma$且$\overline{PF}=7$,若過$P$作$\Gamma$之切線$L$,交$x$軸於$Q$點，則$\left|\overrightarrow{FP}+\overrightarrow{FQ}\right|=$______.




答案：$2\sqrt{21}$

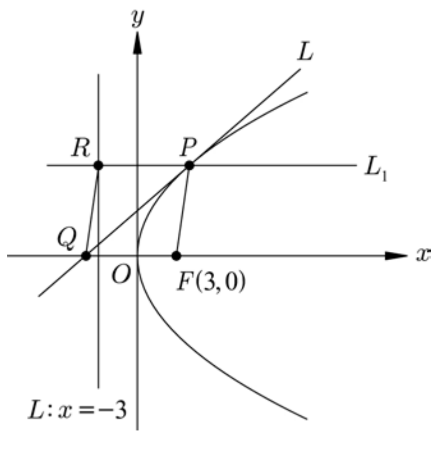
解析：

$4c=12 \Rightarrow c=3$, 準線$L: x=-3$,

設$P(3t^2,6t)$, $\overline{PF}^2=49=(3t^2-3)^2+(6t)^2$

$\Rightarrow 9t^4+18t^2-40=0 \Rightarrow (3t^2+10)(3t^2-4)=0$

$\Rightarrow t^2=\frac{4}{3} \Rightarrow t=\frac{2}{\sqrt{3}}$,　　$\therefore P(4,4\sqrt{3})$.



過 $P$ 作 $L_1$ 平行 $x$ 軸，由光學性質知 $\overline{PF}=\overline{QF}$ (等腰三角形),

設 $L_1$ 與準線交於 $R(-3,4\sqrt{3})$,由定義知 $\overline{PF}=\overline{PR}$,

$\therefore$四邊形 $PFQR$ 爲菱形. $\therefore\left|\overrightarrow{FP}+\overrightarrow{FQ}\right|=\left|\overrightarrow{FR}\right|=\sqrt{6^2+(4\sqrt{3})^2}=\sqrt{84}=2\sqrt{21}$.

12、設抛物線 $\Gamma: y^2=4x$ 與一直線 $L: x-2y-1=0$ 相交於 $A$，$B$ 二點，則 $\overline{AB}$ 之長爲______.

答案：20

解析：設 $A(x_1,y_1)$, $B(x_2,y_2)$,

$\begin{cases} y^2=4x \\ x-2y-1=0 \end{cases} \Rightarrow y^2-8y-4=0$ 二根 $y_1,y_2$ 且 $\begin{cases} y_1+y_2=8 \\ y_1y_2=-4 \end{cases}$

$\Rightarrow (y_1-y_2)^2=(y_1+y_2)^2-4y_1y_2=8^2-4\times(-4)=80$

又直線斜率爲 $\dfrac{1}{2}=\dfrac{y_1-y_2}{x_1-x_2}\Rightarrow x_1-x_2=2(y_1-y_2)$

$\therefore \overline{AB}=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}=\sqrt{5(y_1-y_2)^2}=\sqrt{5}\times\sqrt{80}=20$

13、設 $O$ 表原點.有一直線 $L$ 過一點 $P(1,2)$而交抛物線 $\Gamma: x^2=4y$ 於相異二點 $A$、$B$，且 $\overline{OA}\perp\overline{OB}$，若設 $A(2t,t^2)$，$t>0$，$B(2s,s^2)$，$s\neq0$，則

(1) $ts=$______ (2)直線 $L$ 的方程式爲____________.

答案：$-4$，$y=-2x+4$

解析：$\because \overline{OA}\perp\overline{OB}\Rightarrow\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=0$ $\therefore (2t,t^2)\cdot(2x,s^2)=0\Rightarrow$ $4ts+t^2s^2=0\Rightarrow ts(4+ts)=0$

但 $ts\neq0$ $\therefore ts=-4$

又 $A$、$P$、$B$ 三點共線 $\Rightarrow\dfrac{2t-1}{2s-1}=\dfrac{t^2-2}{s^2-2}$ ， $\therefore 2ts^2-4t-s^2-2st^2+t^2+4s=0$

$-8s-4t-s^2+8t+t^2+4s=0\Rightarrow(t^2-s^2)+4(t-s)=0$

$\Rightarrow(t-s)[(t+s)+4]=0$ 但 $s\neq t\Rightarrow s+t=-4$

$\therefore$直線 $L$ 之斜率 $\dfrac{s^2-t^2}{2s-2t}=\dfrac{(s-t)(s+t)}{2(s-t)}=\dfrac{s+t}{2}=-2$

$\therefore L$ 之方程式爲 $y-2=-2(x-1)$ 即 $y=-2x+4$

14、試求與直線 $3x+2y=1$ 垂直又與抛物線 $\Gamma: y^2-3x+2y+1=0$ 相切的直線之方程式爲__.

答案：$16x-24y+3=0$

解析：抛物線 $(y+1)^2=3x\Rightarrow(y+1)^2=4\cdot\dfrac{3}{4}(x-0)$ 之由切線公式 $y+1=m(x-0)+\dfrac{c}{m}$

斜率爲 $\dfrac{2}{3}$ ，切線爲 $(y+1)=\dfrac{2}{3}(x)+\dfrac{\frac{3}{4}}{\frac{2}{3}}$ ，即 $16x-24y+3=0$

15、拋物線$x^2=4y$上有一弦，其中點爲(1,2)，則此弦之方程式爲________________，又其弦長爲______________.

答案：$x-2y+3=0$，$\sqrt{35}$

解析：$x^2=4y$上有一弦，$\overline{PQ}$之中點爲(1,2)，設$P(x,y)$，$Q(2-x,4-y)$分別代入$x^2=4y$

$\Rightarrow\ x^2=4y\ldots\ldots①$，$(2-x)^2=4(4-y)\ldots\ldots②$

①-② 得$4x-4=8y-16\Rightarrow x-2y+3=0$

$\begin{cases}x^2=4y\\ x-2y+3=0\end{cases}\Rightarrow$設 $x^2-2x-6=0$二根$x_1,x_2$且$\begin{cases}x_1+x_2=2\\ x_1x_2=-6\end{cases}$,

此時設$P(x_1,y_1),Q(x_2,y_2)$,

$(x_1-x_2)^2=(x_1+x_2)^2-4x_1x_2==4-4\times(-6)=28$

$\therefore$直線斜率$\dfrac{1}{2}=\dfrac{y_1-y_2}{x_1-x_2}\Rightarrow y_1-y_2=\dfrac{1}{2}(x_1-x_2)$

$\therefore$弦長$\overline{PQ}=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}=\sqrt{\dfrac{5}{4}(x_1-x_2)^2}==\dfrac{\sqrt5}{2}\times\sqrt{28}=\sqrt{35}$

16、過點$(3,-2)$作拋物線$y^2=4ax$之弦，試求諸弦中點的軌跡______________.

答案：$y^2+2y+6a-2ax=0$

解析：設弦所在直線$y+2=m(x-3)$

$\begin{cases}y^2=4ax\\ y+2=m(x-3)\end{cases}\Rightarrow y+2=m(\dfrac{y^2}{4a}-3)\Rightarrow my^2-4ay-12am-8a=0$

$\therefore y_1+y_2=\dfrac{4a}{m}$，$\dfrac{y_1+y_2}{2}=\dfrac{2a}{m}$，又中點$(\dfrac{x_1+x_2}{2},\dfrac{y_1+y_2}{2})$在直線$y+2=m(x-3)$上

代入$\dfrac{y_1+y_2}{2}+2=m(\dfrac{x_1+x_2}{2}-3)\Rightarrow\dfrac{x_1+x_2}{2}=3+\dfrac{1}{m}(2+\dfrac{y_1+y_2}{2})$

$\therefore\dfrac{x_1+x_2}{2}=3+\dfrac{2}{m}+\dfrac{2a}{m^2}$，設諸弦中點爲(*x*,*y*)，

其中$y=\dfrac{y_1+y_2}{2}$ $\therefore m=\dfrac{2a}{y}$，$\dfrac{1}{m}=\dfrac{y}{2a}$

$\therefore\ x=\dfrac{x_1+x_2}{2}$，$x=3+\dfrac{2y}{2a}+\dfrac{2ay^2}{4a^2}\Rightarrow y^2+2y+6a-2ax=0$

17、過點(3,4)與橢圓$4x^2+9y^2=36$相切的直線方程式爲______和______.

答案：$y-4=\dfrac{1}{2}(x-3)$，$x=3$

解析：$4x^2+9y^2=36\Rightarrow\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}=1$,橢圓切線爲$y=mx\pm\sqrt{9m^2+4}$，

代入(3,4)得$4=3m\pm\sqrt{9m^2+4}$，$m=\dfrac{1}{2}$ $\therefore$切線爲$y-4=\dfrac{1}{2}(x-3)$和$x=3$

18、設橢圓$2x^2+y^2+4x=6$與直線$x-2y+k=0$相切，則$k=$________或________.

$\boxed{答案}$：7, –5

$\boxed{解析}$：橢圓$2(x+1)^2+y^2=8 \Rightarrow \dfrac{(x+1)^2}{4}+\dfrac{y^2}{8}=1$，切線爲$y=m(x+1)\pm\sqrt{4m^2+8}$

又斜率$m=\dfrac{1}{2}$，得$y=\dfrac{1}{2}(x+1)\pm\sqrt{9} \Rightarrow x-2y+7=0$或$x-2y-5=0$，$\therefore k=7$或–5

19、自橢圓外一點 $P(3,-3)$作橢圓$\dfrac{(x+1)^2}{4}+\dfrac{(y-2)^2}{25}=1$之兩切線與橢圓相切於二點 $A$、$B$，若$A$爲橢圓之頂點，則$A$點坐標爲__________又$AB$直線方程式爲____________.

$\boxed{答案}$：$(-1,-3)$，$5x-y+2=0$

$\boxed{解析}$：設橢圓外一點$P(3,-3)$作橢圓之兩切線，切點弦$AB$之直線方程式爲

$$\frac{(3+1)(x+1)}{4}+\frac{(-3-2)(y-2)}{25}=1 \Rightarrow 5x-y+2=0$$

$$\begin{cases}\dfrac{(x+1)^2}{4}+\dfrac{(y-2)^2}{25}=1 \\ 5x-y+2=0\end{cases} \Rightarrow 5x^2+2x-3=0，x=\frac{3}{5}或–1，\therefore A(-1,-3)$$

20、若直線$x+y=2$與橢圓$4x^2+9y^2=36$相交於$P$、$Q$二點，則$\overline{PQ}$之中點坐標爲_______.

$\boxed{答案}$：$(\dfrac{18}{13},\dfrac{8}{13})$

$\boxed{解析}$：$\begin{cases}x+y=2 \\ 4x^2+9y^2=36\end{cases} \Rightarrow 13x^2-36x=0 \Rightarrow x(13x-36)=0 \Rightarrow x=0$或$x=\dfrac{36}{13}$，

$P$、$Q$中點$x$坐標$\dfrac{0+\frac{36}{13}}{2}=\dfrac{18}{13}$

代入$x+y=2 \Rightarrow y=2-\dfrac{18}{13}=\dfrac{8}{13}$，即$\overline{PQ}$中點坐標爲$(\dfrac{18}{13},\dfrac{8}{13})$

21、與雙曲線$\Gamma:\dfrac{(y-5)^2}{63}-\dfrac{(x-2)^2}{28}=1$相交於一點$P(8,-7)$的直線之方程式爲____________.

$\boxed{答案}$：$9x+8y=16$

$\boxed{解析}$：即切線爲$\dfrac{(-7-5)(y-5)}{63}-\dfrac{(8-2)(x-2)}{28}=1 \Rightarrow 9x+8y=16$

22、過雙曲線$4x^2-y^2-8x-2y-9=0$上一點(3,1)的切線方程式爲______________.

$\boxed{答案}$：$4x-y-11=0$

$\boxed{解析}$：切線爲$4\cdot3\cdot x-1\cdot y-4(x+3)-(y+1)-9=0 \Rightarrow 4x-y-11=0$

23、斜率爲3而與雙曲線$\dfrac{(x-2)^2}{25}-\dfrac{(y+1)^2}{100}=1$相切的直線之方程式爲________和_________.

$\boxed{答案}$：$y=3x-7+5\sqrt{5}$，$y=3x-7-5\sqrt{5}$

$\boxed{\text{解析}}$：設切線爲 $(y+1)=m(x-2)\pm\sqrt{25m^2-100}$ ， $m=3$ 代入

$\therefore\ y=3x-7+5\sqrt{5}$ 和 $y=3x-7-5\sqrt{5}$

24、設雙曲線 $y^2-5x^2-2y-10x=9$ 與 $x-y+k=0$ 相切，則 $k=$________或________.

$\boxed{\text{答案}}$：4, 0

$\boxed{\text{解析}}$：雙曲線 $-\dfrac{(x+1)^2}{1}+\dfrac{(y-1)^2}{5}=1$ 切線 $y-1=m(x+1)\pm\sqrt{(-1)m^2+5}$

斜率爲 1，切線爲 $y-1=(x+1)\pm\sqrt{-1+5}$ $\Rightarrow x-y+4=0$ 或 $x-y=0$ ，$\therefore k=4$ 或 $0$

25、若 $x^2-3y^2+12y-25=0$ 的一切線爲 $4x-3y-7=0$ ，則其切點坐標爲__________.

$\boxed{\text{答案}}$：(4 , 3)

$\boxed{\text{解析}}$：$\begin{cases} x^2-3y^2+12y-25=0 \\ 4x-3y-7=0 \end{cases}$ $\Rightarrow x^2-8x+16=0$ $\quad\therefore x=4,\ y=3$ ，切點爲(4 , 3)

26、若雙曲線 $\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{1}=1$ 上有一弦，其中點坐標爲(4,1)，則此弦之方程式爲____________，又其弦長爲__________.

$\boxed{\text{答案}}$：$x-y=3$, $\dfrac{8}{3}\sqrt{3}$

$\boxed{\text{解析}}$：雙曲線上有一弦 $\overline{PQ}$ ，其中點坐標爲(4,1)，設 $P(x , y)$，$Q(8-x , 2-y)$代入 $\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{1}=1$

$\therefore \dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{1}=1\cdots\cdots$① $\qquad \dfrac{(8-x)^2}{4}-\dfrac{(2-y)^2}{1}=1\cdots\cdots$②

①−② 得 $16x-64-16y+16=0 \ \Rightarrow\ x-y=3$

$\begin{cases} \dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{1}=1 \\ x-y=3 \end{cases}$ $\Rightarrow -3y^2+6y+5=0$ $\quad$ 其二根爲 $y_1$ ， $y_2$ 且 $\begin{cases} y_1+y_2=-\dfrac{6}{-3}=2 \\ y_1y_2=\dfrac{5}{-3} \end{cases}$

$\Rightarrow (y_1-y_2)^2=(y_1+y_2)^2-4y_1y_2=2^2-4\times(\dfrac{5}{-3})=\dfrac{32}{3} \Rightarrow |y_1-y_2|=\sqrt{\dfrac{32}{3}}$

又直線斜率爲 $1=\dfrac{y_1-y_2}{x_1-x_2} \Rightarrow x_1-x_2=y_1-y_2$

$\therefore$弦長 $\overline{PQ}=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}=\sqrt{2(y_1-y_2)^2}=\sqrt{2}\times\sqrt{\dfrac{32}{3}}=\dfrac{8}{3}\sqrt{3}$

27、坐標平面上，當點 $P=(x,y)$ 在曲線 $y^2+2xy+x^2-2x+6y+1=0$ 上變動時，點 $P$ 到直線 $x-y+4=0$ 的距離的最小值等於__________.

$\boxed{\text{答案}}$：$2\sqrt{2}$

$\boxed{\text{解析}}$：設平行 $x-y+4=0$ 和曲線相切的直線爲 $x-y+k=0$

$\Rightarrow y=x+k$ 代入二次曲線 $\Rightarrow x^2+2x(x+k)+(x+k)^2-2x+6(x+k)+1=0$

$\Rightarrow 4x^2+(4k+4)x+k^2+6k+1=0$

$\Rightarrow$ 因爲兩者相切，$\therefore D=0 \Rightarrow (4k+4)^2-4\cdot 4(k^2+6k+1)=0$

$\Rightarrow k=0 \Rightarrow$ 切線爲$x-y=0$

$\Rightarrow P$ 到直線 $x-y+4=0$ 距離最小值即爲兩平行線$\begin{cases} x-y+4=0 \\ x-y=0 \end{cases}$的距離$=\dfrac{|4-0|}{\sqrt{1+1}}=2\sqrt{2}$

28、過 $P(1, 2)$ 之直線與 $y^2=8(x-1)$ 僅有一交點，則此直線方程式爲＿＿＿＿＿＿＿＿.

答案： $y=2$， $x=1$， $y=x+1$

解析：僅有一個交點有兩種情形：(1)平行對稱軸的水平線，(2)切線.

(1)若爲水平線時，此直線方程式爲 $y=2$ .

(2)若爲切線時， $4c=8, c=2$

$\therefore$方程式爲 $y=m(x-1)+\dfrac{2}{m}$ 過(1, 2)， $\therefore 2=\dfrac{2}{m} \Rightarrow m=1$(另一條則爲鉛直線)

$\therefore$切線 $L: y-2=1\cdot(x-1) \Rightarrow y=x+1$，另一條切線爲 $x=1$.

29、雙曲線 $x^2-y^2=4$ 上任一點 $P$ 作切線交兩漸近線於 $A, B$，則 $\triangle OAB$ 面積是＿＿＿＿＿.

答案：4

解析： $x^2-y^2=4 \Rightarrow \dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{4}=1$ , 二漸近線 $y=(\pm\dfrac{2}{2})x \Rightarrow y=\pm x$

設切點 $P(2\sec\theta, 2\tan\theta)$ ，$\therefore$切線 $L: \sec\theta x-\tan\theta y=2$

$A:\begin{cases} \sec\theta x-\tan\theta y=2 \\ x-y=0 \end{cases} \Rightarrow A(\dfrac{2}{\sec\theta-\tan\theta}, \dfrac{2}{\sec\theta-\tan\theta})$

$B:\begin{cases} \sec\theta x-\tan\theta y=2 \\ x+y=0 \end{cases} \Rightarrow B(\dfrac{2}{\sec\theta+\tan\theta}, \dfrac{-2}{\sec\theta+\tan\theta})$

$\therefore \triangle OAB$ 面積$=\dfrac{1}{2}\begin{vmatrix} \dfrac{2}{\sec\theta-\tan\theta} & \dfrac{2}{\sec\theta-\tan\theta} \\ \dfrac{2}{\sec\theta+\tan\theta} & \dfrac{-2}{\sec\theta+\tan\theta} \end{vmatrix}$

$=\dfrac{1}{2}\left|\dfrac{-4}{\sec^2\theta-\tan^2\theta}-\dfrac{-4}{\sec^2\theta-\tan^2\theta}\right|=\dfrac{1}{2}|-4-4|=4$

30、點 $P(3, a)$ 爲拋物線 $x^2+4y=0$ 外一點，自點 $P$ 作拋物線的兩條切線，此二條切線會互相垂直，則 $a=$＿＿＿＿.

答案：1

解析： $x^2=-4y$ 之切線爲 $y=mx+m^2$ 代入$(3, a) \Rightarrow m^2+3m-a=0$ 二根 $m_1, m_2$

又過 $P$ 點兩切線垂直$\Rightarrow m_1m_2=-1$ $\therefore \dfrac{-a}{1}=-1$ ， $a=1$

31、試求與拋物線 $y=\dfrac{1}{4}x^2$ 相切，且互相垂直的兩切線的交點軌跡方程式爲＿＿＿＿＿＿＿，

其圖形爲＿＿＿＿＿＿.

答案：$y=-1$，一水平直線

解析：$x^2=4y$ 之切線爲 $y=mx-m^2$ 代入點 $P(x,y)\Rightarrow m^2-mx+y=0$ 二根 $m_1, m_2$

其過 $P$ 點之兩切線互相垂直 $\Rightarrow m_1\cdot m_2=-1$ $\therefore \frac{y}{1}=-1$，$y=-1$，其圖形爲一水平直線

32、在第一象限內直線 $L$ 與橢圓 $4x^2+25y^2=100$ 相切於 $P$，且與兩坐標軸分別交於 $A$，$B$ 兩點，設 $O$ 爲原點，則 $\Delta OAB$ 面積之最小值爲＿＿＿＿＿，又此時 $P$ 點坐標爲＿＿＿＿＿＿.

答案：$10, (\frac{5\sqrt{2}}{2},\sqrt{2})$

解析：$4x^2+25y^2=100\Rightarrow \frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{4}=1$

設切點 $P$ 爲 $(5\cos\theta$，$2\sin\theta)$，則切線方程式爲 $2\cos\theta x+5\sin\theta y=10$

$\therefore A=(\frac{5}{\cos\theta},0)$，$B=(0,\frac{2}{\sin\theta})$

$\therefore \Delta ABO$ 面積 $=\frac{5}{\sin\theta\cos\theta}=\frac{10}{\sin 2\theta}\geq 10$ $\quad(\because -1\leq\sin 2\theta\leq 1)$

$\therefore$ 最小值爲 10，此時 $\sin 2\theta=1$，$\theta=45°$ $\therefore P(\frac{5\sqrt{2}}{2},\sqrt{2})$

33、過橢圓 $\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{2}=1$ 上一點 $P$ 的切線與兩坐標軸分別交於 $A$、$B$ 兩點，則 $\overline{AB}$ 之最小值爲＿＿＿＿，在第一象限內，產生 $\overline{AB}$ 的最小值之 $P$ 點坐標爲＿＿＿＿＿＿＿.

答案：$3\sqrt{2}$，$P(\frac{4\sqrt{3}}{3},\frac{\sqrt{6}}{3})$

解析：設 $P=(2\sqrt{2}\cos\theta,\sqrt{2}\sin\theta)$，切線爲 $\frac{2\sqrt{2}}{8}\cos\theta x+\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\theta y=1$

$\therefore A=(\frac{2\sqrt{2}}{\cos\theta},0)$，$B=(0,\frac{\sqrt{2}}{\sin\theta})$，$\overline{AB}=\sqrt{\frac{8}{\cos^2\theta}+\frac{2}{\sin^2\theta}}$

由柯西不等式 $(\frac{8}{\cos^2\theta}+\frac{2}{\sin^2\theta})(\cos^2\theta+\sin^2\theta)\geq(2\sqrt{2}+\sqrt{2})^2$ $\quad\therefore \overline{AB}\geq 3\sqrt{2}$

$\overline{AB}$ 之最小值 $3\sqrt{2}$，此時 $\frac{\cos\theta}{\frac{2\sqrt{2}}{\cos\theta}}=\frac{\sin\theta}{\frac{\sqrt{2}}{\sin\theta}}\Rightarrow \cos^2\theta=2\sin^2\theta$

又 $\cos^2\theta+\sin^2\theta=1\Rightarrow \cos^2\theta=\frac{2}{3}$，$\sin^2\theta=\frac{1}{3}\Rightarrow \cos\theta=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}},\sin\theta=\frac{1}{\sqrt{3}}$

$\therefore P(\frac{4\sqrt{3}}{3},\frac{\sqrt{6}}{3})$

34、設橢圓兩焦點分別爲 $(4,0)$，$(-4,0)$ 又其上有一切線方程式爲 $4x+3y=41$，則此橢圓之長軸長爲＿＿＿＿＿，又其橢圓方程式爲＿＿＿＿＿＿＿＿.

$\boxed{\text{答案}}$：$2\sqrt{73}$，$\dfrac{x^2}{73}+\dfrac{y^2}{57}=1$

$\boxed{\text{解析}}$：設 $F(4,0)$，$F'(-4,0)$，$P$ 爲切點

其中 $F(4,0)$對 $4x+3y=41$ 之對稱點 $H$ 爲$(4,0)-2\times\dfrac{(-25)}{25}(4,3)=(12,6)$

$\therefore$長軸長 $2a=\overline{PF}+\overline{PF'}=\overline{HF'}$ 爲 $\sqrt{16^2+6^2}=2\sqrt{73}\Rightarrow a=\sqrt{73}$

$\overline{FF'}=2c=10\Rightarrow c=5$；$b^2=a^2-c^2=57$，$\therefore$橢圓方程式爲 $\dfrac{x^2}{73}+\dfrac{y^2}{57}=1$

35、設 $F(5,0)$，$F'(-5,0)$爲雙曲線 $\Gamma$ 的兩焦點，$3x-4y=-10$ 與 $\Gamma$ 相切，則 $\Gamma$ 的貫軸長爲____，又 $\Gamma$ 的方程式爲____________________.

$\boxed{\text{答案}}$：$4\sqrt{5}$，$\dfrac{x^2}{20}-\dfrac{y^2}{5}=1$

$\boxed{\text{解析}}$：$F(5,0)$對 $3x-4y+10=0$ 之對稱點 $H$ 爲 $(5,0)-2\times\dfrac{25}{25}(3,-4)=(-1,8)$

$\therefore$貫軸長 $2a=\overline{PF'}-\overline{PF}=\overline{HF'}=\sqrt{4^2+8^2}=4\sqrt{5}\Rightarrow a=2\sqrt{5}$，$c=5$，$b=\sqrt{c^2-a^2}=\sqrt{5}$，

$\therefore$雙曲線爲 $\dfrac{x^2}{20}-\dfrac{y^2}{5}=1$

36、坐標平面上給定點 $A(\dfrac{9}{4},2)$ 、直線 $L:y=-5$ 與拋物線 $\Gamma:x^2=8y$ .以 $d(P,L)$ 表示點 $P$ 到直線 $L$ 的距離.若點 $P$ 在 $\Gamma$ 上變動，則 $\left|d(P,L)-\overline{AP}\right|$ 之最大值爲_______.(化成最簡分數)

$\boxed{\text{答案}}$：$\dfrac{21}{4}$

$\boxed{\text{解析}}$：拋物線 $\Gamma:x^2=8y=4\cdot 2y$ 的焦點 $F(0,2)$，準線 $L':y=-2$ 依題意作圖.

由拋物線的定義可知：拋物線線上任一點到焦點的距離與到準線的距離相等.

$\left|d(P',L')-\overline{AP}'\right|=\left|\overline{P'F}-\overline{AP}'\right|\le\overline{AF}=\left|\overline{PF}-\overline{AP}\right|=\left|d(P,L')-\overline{AP}\right|$，

故 $\left|d(P,L')-\overline{AP}\right|$ 之最大值發生於 $P$，最大值爲 $\overline{AF}=\dfrac{9}{4}$.

$\left|d(P,L)-\overline{AP}\right|=\left|d(P,L')-\overline{AP}\right|+d(L',L)\le\dfrac{9}{4}+3=\dfrac{21}{4}$，

即 $\left|d(P,L)-\overline{AP}\right|$ 之最大值爲 $\dfrac{21}{4}$.