高雄市明誠中學 高二數學平時測驗 日期：100.03.27					
範圍	1-4 雙曲線	班級	二年____班	姓名	
		座號			

一、填充題 (每題 10 分)

1.已知平面上兩點，$A(-5,0)$，$B(3,0)$，若動點$P(x,y)$滿足，則

(1) $\overline{PA}+\overline{PB}=10$，$P$點軌跡為____________．(2) $\left|\overline{PA}-\overline{PB}\right|=8$，$P$點軌跡為____________．

解答 (1)橢圓;(2)兩射線

解析 (1) $2a=10$，$2c=\overline{AB}=8$，$\because 2a>2c$，$\therefore$圖形為橢圓．

(2) $2a=8$，$2c=8$，$\because 2a=2c$，$\therefore$圖形為以為A,B端點的相反兩射線．

2.已知一雙曲線的兩焦點為$(2,4)$及$(-6,4)$且共軛軸長為 4，則此雙曲線

(1)共軛雙曲線方程式為____________．(2)兩漸近線方程式為____________．

解答 (1) $-\dfrac{(x+2)^2}{12}+\dfrac{(y-4)^2}{4}=1$;(2) $x+2+\sqrt{3}(y-4)=0$或$x+2-\sqrt{3}(y-4)=0$

解析 (1)中心$(-2,4)$，左右型，

$2c=8\Rightarrow c=4$，$2b=4\Rightarrow b=2$，又$c^2=a^2+b^2\Rightarrow a^2=16-4=12$，

已知雙曲線方程式為$\dfrac{(x+2)^2}{12}-\dfrac{(y-4)^2}{4}=1$，

則共軛雙曲線方程式為$-\dfrac{(x+2)^2}{12}+\dfrac{(y-4)^2}{4}=1$．

(2) $\left(\dfrac{x+2}{\sqrt{12}}\right)^2-\left(\dfrac{y-4}{2}\right)^2=0\Rightarrow\left(\dfrac{x+2}{2\sqrt{3}}-\dfrac{y-4}{2}\right)\left(\dfrac{x+2}{2\sqrt{3}}+\dfrac{y-4}{2}\right)=0$，

$\therefore$漸近線方程式為$\dfrac{x+2}{\sqrt{3}}+(y-4)=0$或$\dfrac{x+2}{\sqrt{3}}-(y-4)=0$

$\Rightarrow x+2+\sqrt{3}(y-4)=0$或$x+2-\sqrt{3}(y-4)=0$．

3.請將下列各題填入適當的代號:

(A)橢圓 (B)拋物線 (C)雙曲線 (D)線段 (E)二射線 (F)一射線

(G)無圖形 (H)雙曲線的一部分

(1)方程式$\sqrt{x^2+\left(y-\dfrac{1}{4}\right)^2}=\left|x+\dfrac{1}{4}\right|$的圖形為____________．

(2)方程式$\sqrt{(x-3)^2+(y-4)^2}+\sqrt{x^2+y^2}=5$的圖形為____________．

(3)方程式$\sqrt{(x-2)^2+(y-2)^2}-\sqrt{x^2+y^2}=2\sqrt{2}$的圖形為____________．

(4) $P(x,y)$，$\begin{cases}x=2\cos 2\theta\\ y=2\sin\theta\cos\theta\end{cases}$，$0\le\theta\le\pi$，$P$的軌跡圖形為____________．

(5) $P(x,y)$，$\begin{cases} x=2\sin\theta \\ y=-\cos\theta \end{cases}$，$\theta$ 爲實數，P 的軌跡圖形爲____________．

解答 (1)B;(2)D;(3)F;(4)A;(5)A

解析 (1)$\because \sqrt{x^2+\left(y-\frac{1}{4}\right)^2}=\dfrac{\left|x+\frac{1}{4}\right|}{1}$ 且 $\left(0,\frac{1}{4}\right)$ 不在直線 $x+\frac{1}{4}=0$ 上，$\therefore$爲拋物線，選(B)．

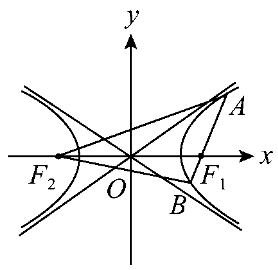
(2)題意，$P(x,y)$，$F_1(3,4)$，$F_2(0,0)$，$\overline{PF_1}+\overline{PF_2}=5$，$\overline{F_1F_2}=5$ 表一線段，$\therefore$(D)．

(3)題意，$P(x,y)$，$F_1(2,2)$，$F_2(0,0)$，$\overline{PF_1}-\overline{PF_2}=2\sqrt{2}$，$\overline{F_1F_2}=2\sqrt{2}$ 表一射線，$\therefore$(F)．

(4) $P(x,y)=(2\cos 2\theta,\sin 2\theta)$，$0\le 2\theta\le 2\pi$ 表橢圓，選(A)．

(5)表橢圓，$\therefore$選(A)．

4.已知 F_1、F_2 是雙曲線 $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{4}=1$ 的焦點，$\overline{AB}$ 是經過右焦點 F_1 的一弦，而且 A、B 都在此雙曲線的右支上，若△ABF_2 的周長爲 30，則弦長 $\overline{AB}=$____________．



解答 9

解析 如圖且依定義可知，$\overline{AF_2}-\overline{AF_1}=\overline{BF_2}-\overline{BF_1}=2a=6$，

△ABF_2 周長爲 $\overline{AF_2}+\overline{BF_2}+\overline{AB}=30 \Rightarrow \left(6+\overline{AF_1}\right)+\left(6+\overline{BF_1}\right)+\overline{AB}=30$

$\Rightarrow 2\overline{AB}=18$，$\therefore \overline{AB}=9$．

5.平面上雙曲線 $\frac{(x-1)^2}{25}-\frac{(y+2)^2}{144}=1$ 與橢圓 $\frac{(x-1)^2}{k^2+1}+\frac{(y+2)^2}{2k}=1$ 共焦點，則 $k=$____________．

解答 14

解析 $\because$雙曲線和橢圓共焦點，且爲左右型，且 c 共用

$\therefore c^2=25+144=\left(k^2+1\right)-(2k)$

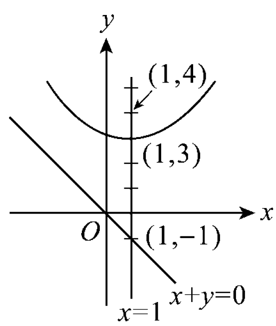
$\Rightarrow k^2-2k-168=0 \Rightarrow (k-14)(k+12)=0 \Rightarrow k=14$ 或 $k=-12$，

又 $k^2+1>0$，$2k>0 \Rightarrow k>0$，$\therefore k=14$．

6.中心在直線 $x+y=0$ 上的雙曲線，則

(1)若有一頂點爲 $(1,3)$，靠近此頂點的焦點爲 $(1,4)$，則其斜率爲正的漸近線方程式爲____________．

(2)若爲等軸雙曲線且有一漸近線爲 $x-3y=8$，則其另一漸近線爲____________．



解答 (1) $4x-3y-7=0$;(2) $3x+y=4$

解析 (1)由圖可知，

中心在 $x=1$，$x+y=0$ 上 $\Rightarrow$ 中心 $(1,-1)$，

又 $a=4$，$c=5\Rightarrow b=3$，且爲上下型雙曲線 $\Rightarrow \frac{(y+1)^2}{16}-\frac{(x-1)^2}{9}=1$

$\Rightarrow$漸近線： $y+1=\pm\frac{4}{3}(x-1)$

$\Rightarrow$斜率爲正的漸近線爲 $y+1=\frac{4}{3}(x-1)\Rightarrow 3y+3-4x+4=0\Rightarrow 4x-3y-7=0$.

(2)解 $\begin{cases}x-3y=8\\x+y=0\end{cases}\Rightarrow x=2$， $y=-2$，中心 $(2,-2)$，

等軸雙曲線兩漸近線互相垂直，

$\therefore$設另一漸近線爲 $3x+y=k$，過 $(2,-2)\Rightarrow 3x+y=4$.

7.等軸雙曲線 Γ 有一條漸近線爲 $x-y=0$，中心坐標爲 $(1,1)$ 且 Γ 通過點 $(3,0)$，則雙曲線 Γ 的方程式爲__________ .

解答 $\frac{(x-1)^2}{3}-\frac{(y-1)^2}{3}=1$

解析 設另一漸近線爲 $x+y+k=0$， $(1,1)$ 代入得 $k=-2$， $\therefore x+y-2=0$，

設所求雙曲線爲 $(x-y)(x+y-2)=t$， $(3,0)$ 代入得 $t=3$，

方程式爲 $(x-y)(x+y-2)=3\Rightarrow x^2-2x-y^2+2y=3$

$\Rightarrow (x-1)^2-(y-1)^2=3+1-1=3\Rightarrow\frac{(x-1)^2}{3}-\frac{(y-1)^2}{3}=1$.

8.雙曲線 $\Gamma:\left|\sqrt{(x+4)^2+(y-1)^2}-\sqrt{(x-2)^2+(y+3)^2}\right|=6$，則

(1)此雙曲線的中心點坐標爲__________ . (2)貫軸長爲__________ .

解答 (1) $(-1,-1)$;(2)6

解析 $F_1(-4,1)$， $F_2(2,-3)$， $2a=6$，

(1)中心爲 $\overline{F_1F_2}$ 中點 $(-1,-1)$.　　(2) $2a=6$.

9.雙曲線方程式 $4x^2-9y^2-16x+18y+43=0$，則此雙曲線的漸近線方程式爲__________ .

解答 $2x+3y-7=0$ 或 $2x-3y-1=0$

解析 原式$\Rightarrow 4(x-2)^2-9(y-1)^2=-36$，漸近線 $4(x-2)^2-9(y-1)^2=0$

$\Rightarrow 2(x-2)+3(y-1)=0$ 或 $2(x-2)-3(y-1)=0\Rightarrow 2x+3y-7=0$ 或 $2x-3y-1=0$.

10.雙曲線方程式爲 $9(x-3)^2-16(y-2)^2=144$，則此雙曲線的焦點坐標爲__________ .

解答 $(8,2)$、$(-2,2)$

解析 $\frac{(x-3)^2}{16}-\frac{(y-2)^2}{9}=1$，$a=4$，$b=3\Rightarrow c=\sqrt{a^2+b^2}=5$，焦點 $(3\pm5,2)\Rightarrow(8,2)$、$(-2,2)$.

11.若一雙曲線的中心爲$(2,3)$，貫軸垂直x軸，貫軸長爲 6，共軛軸長爲 8，則此雙曲線方程式爲 ____________ .

解答　$-\dfrac{(x-2)^2}{16}+\dfrac{(y-3)^2}{9}=1$

解析　貫軸垂直x軸$\Rightarrow$上下型，中心$(2,3)$，$2a=6\Rightarrow a=3$，$2b=8\Rightarrow b=4$，

$\therefore$雙曲線：$-\dfrac{(x-2)^2}{16}+\dfrac{(y-3)^2}{9}=1$.

12.若雙曲線$\Gamma_1:\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{9}=1$上一點$P$到此雙曲線兩漸近線的距離乘積爲$\dfrac{36}{13}$，今有一橢圓$\Gamma_2$與雙曲線$\Gamma_1$共焦點且短軸長爲 4，則橢圓$\Gamma_2$方程式的標準式爲 ____________ .

解答　$\dfrac{x^2}{17}+\dfrac{y^2}{4}=1$

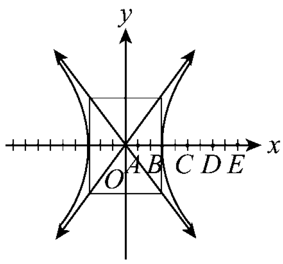
解析　$\dfrac{a^2b^2}{a^2+b^2}=\dfrac{36}{13}\Rightarrow\dfrac{a^2\times 9}{a^2+9}=\dfrac{36}{13}$，$\therefore a^2=4$，

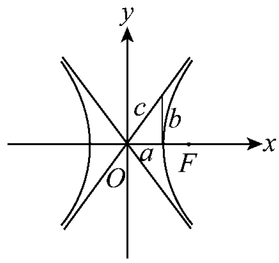
$\because$橢圓與雙曲線共焦點，$\therefore$方向相同$\Rightarrow$左右型，

雙曲線中$\begin{cases}a^2+b^2=4+9=13\\c^2=a^2+b^2=13\end{cases}$，橢圓中$\begin{cases}2b=4\Rightarrow b=2\\a^2=b^2+c^2=4+13=17\end{cases}$

$\therefore$橢圓方程式爲$\dfrac{x^2}{17}+\dfrac{y^2}{4}=1$.

13.下圖是一個雙曲線，且A、B、C、D、E五個點中有一爲其焦點，試判斷其焦點爲 ____________ .





解答　C

解析　利用$c^2=a^2+b^2\Rightarrow\overline{OF}=c$，故選點$C$.

14.以$y=2x$，$y=-2x$爲漸近線，且焦點是$(4,0)$的雙曲線方程式標準式爲 ____________ .

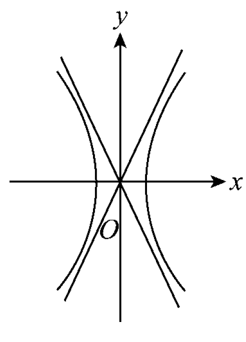
解答　$\dfrac{5x^2}{16}-\dfrac{5y^2}{64}=1$

解析　$y=2x$，$y=-2x$爲漸近線，且焦點是$(4,0)\Rightarrow$左右型，中心$(0,0)$，$c=4$，

$\dfrac{b}{a}=2\Rightarrow b=2a=2k$，

又$c^2=a^2+b^2\Rightarrow 16=k^2+4k^2=5k^2$，

$\therefore a^2=k^2=\dfrac{16}{5}$，$b^2=4k^2=4\times\dfrac{16}{5}=\dfrac{64}{5}$，



方程式爲$\dfrac{x^2}{\frac{16}{5}}-\dfrac{y^2}{\frac{64}{5}}=1\Rightarrow\dfrac{5x^2}{16}-\dfrac{5y^2}{64}=1$．

15.等軸雙曲線Γ的一條漸近線爲$x-2y=0$，中心的坐標$(2,1)$且Γ過點$(3,2)$，則此雙曲線Γ的方程式爲__________．

解答 $(x-2y)(2x+y-5)=-3$

解析 等軸雙曲線的兩漸近線垂直，設另一條漸近線：$2x+y+k=0$，過中心$(2,1)$

$\Rightarrow 4+1+k=0\Rightarrow k=-5\Rightarrow$另一條漸近線：$2x+y-5=0$，

設$\Gamma:(x-2y)(2x+y-5)=t$，又Γ過$(3,2)\Rightarrow(-1)\times3=t$，

$\therefore$所求$\Gamma:(x-2y)(2x+y-5)=-3$．

16.設k爲實數，若方程式$\dfrac{x^2}{k^2+3k+2}+\dfrac{y^2}{2-k}=1$的圖形是雙曲線，則$k$的範圍爲__________．

解答 $k>2$或$-2<k<-1$．

解析 雙曲線，$(k^2+3k+2)(2-k)<0\Rightarrow(k+2)(k+1)(k-2)>0$，$\therefore k>2$或$-2<k<-1$．

17.已知雙曲線的兩焦點分別爲$F_1(8,2)$，$F_2(-2,2)$，其一漸近線的斜率爲$\dfrac{3}{4}$，則此雙曲線的共軛雙曲線方程式爲__________．

解答 $\dfrac{(x-3)^2}{16}-\dfrac{(y-2)^2}{9}=-1$

解析 由題意知，中心$(3,2)$，左右型，由漸近線斜率$\dfrac{3}{4}=\dfrac{b}{a}\Rightarrow$設$a=4k$，$b=3k$

$\Rightarrow(4k)^2+(3k)^2=5^2\Rightarrow k=1\Rightarrow$原雙曲線方程式爲$\dfrac{(x-3)^2}{16}-\dfrac{(y-2)^2}{9}=1$，

故共軛方程式爲$\dfrac{(x-3)^2}{16}-\dfrac{(y-2)^2}{9}=-1$．

18.$(x+2y)(x-2y+4)=1$的圖形爲一雙曲線，其標準式爲__________．

解答 $(x+2)^2-\dfrac{(y-1)^2}{\frac{1}{4}}=1$

解析 原式$\Rightarrow x^2-4y^2+4x+8y=1\Rightarrow(x+2)^2-4(y-1)^2=1+4-4=1$，

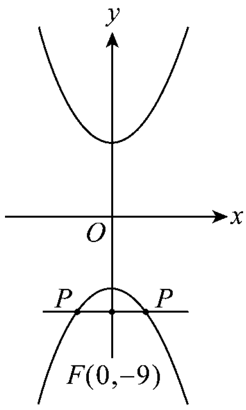
$\therefore(x+2)^2-\dfrac{(y-1)^2}{\frac{1}{4}}=1$爲所求．

19.$P(x,y)$爲雙曲線$\Gamma:4y^2-5x^2=180$上的一點，F表下焦點，則

(1) P與兩漸近線距離的乘積爲__________．　(2)若$P=(x,-9)$，則$\overline{FP}$長爲__________．

解答 (1)20;(2) $\frac{12}{\sqrt{5}}$

解析 $-5x^2+4y^2=180\Rightarrow -\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{45}=1\Rightarrow a^2=45$， $b^2=36$，



(1)所求爲 $\frac{a^2b^2}{a^2+b^2}=\frac{45\times 36}{45+36}=20$ ．

(2) $c^2=a^2+b^2=81\Rightarrow c=9$， $\therefore F(0,-9)$，

又 $-5x^2+4y^2=180$， $y=-9$ 代入

$\Rightarrow -5x^2=180-324=-144\Rightarrow x^2=\frac{144}{5}\Rightarrow x=\pm\frac{12}{\sqrt{5}}$，

$\therefore P\left(\pm\frac{12}{\sqrt{5}},-9\right)$， $\overline{FP}=\sqrt{\left(\frac{12}{\sqrt{5}}\right)^2}=\frac{12}{\sqrt{5}}$ ．

20.雙曲線的方程式爲 $9x^2-4y^2+9=0$，則共軛雙曲線的共軛軸長爲____________．

解答 3

解析 共軛雙曲線： $-9x^2+4y^2+9=0\Rightarrow -9x^2+4y^2=-9\Rightarrow \frac{x^2}{1}-\frac{y^2}{\frac{9}{4}}=1$，

$\therefore b^2=\frac{9}{4}\Rightarrow b=\frac{3}{2}$， $\therefore$共軛軸長爲 $2b=3$ ．

21.試求中心在原點，貫軸在 y 軸上且通過點 $(2,3)$ 和 $\left(4,-3\sqrt{2}\right)$ 的雙曲線標準式爲____________．

解答 $\frac{y^2}{6}-\frac{x^2}{8}=1$

解析 $\because$貫軸在 y 軸，$\therefore$上下型 $\Rightarrow -\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1$，

$\because$過 $(2,3)$、$\left(4,-3\sqrt{2}\right)$，$\therefore \begin{cases}-\frac{4}{b^2}+\frac{9}{a^2}=1\\ -\frac{16}{b^2}+\frac{18}{a^2}=1\end{cases}\Rightarrow b^2=8$， $a^2=6$，所求方程式爲 $\frac{y^2}{6}-\frac{x^2}{8}=1$ ．

22.設一雙曲線方程式其中心在原點,一焦點在 $(5,0)$,一漸近線爲 $y=\frac{3}{4}x$,則方程式爲____________．

解答 $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$

解析 由題意知，左右型且由漸近線斜率 $\frac{3}{4}=\frac{b}{a}\Rightarrow$ 可設 $b=3k$， $a=4k$

$\Rightarrow c^2=a^2+b^2\Rightarrow 5^2=(4k)^2+(3k)^2\Rightarrow k^2=1\Rightarrow a=4$， $b=3$， $\therefore$所求爲 $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$ ．

23.雙曲線 $\frac{x^2}{1}-\frac{y^2}{16}=1$ 的正焦弦長爲____________．

解答 32

解析 $a^2=1\Rightarrow a=1$，$b^2=16\Rightarrow b=4$，$\therefore$正焦弦長爲$\dfrac{2b^2}{a}=\dfrac{2\times16}{1}=32$.

24.設雙曲線$\Gamma:\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{16}=1$，$P$爲其上動點，$F_1$、$F_2$爲其兩焦點，求

(1)若$\overline{PF_1}=5$，則$\overline{PF_2}=$____________. (2)若$\overline{PF_1}=9$，則雙曲線上滿足此條件的P點共有_____個 .

解答 (1)1 或 9;(2)4

解析 $\Gamma:\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{16}=1\Rightarrow a=2$，$b=4$，

(1)由雙曲線定義$\left|\overline{PF_1}-\overline{PF_2}\right|=2a=4\Rightarrow\left|5-\overline{PF_2}\right|=4\Rightarrow\overline{PF_2}=1$或$9$.

(2) $\overline{PF_1}=9$，雙曲線兩支上各有兩點符合此條件（$\because\overline{PF_1}=9>a+c=2+2\sqrt{5}$），

故滿足此條件的P點共有 4 個 .

25.設雙曲線Γ方程式爲$4x^2-9y^2+16x+18y+43=0$，而F_1、F_2是Γ的焦點，試回答下列問題:

(1)兩焦點F_1與F_2的坐標爲____________ .

(2)若$P(x,y)$是Γ上的任一點，則$\left|\overline{PF_1}-\overline{PF_2}\right|=$____________ .

(3)兩漸近線的方程式爲____________ .

解答 (1)$\left(-2,1\pm\sqrt{13}\right)$;(2)4;(3) $2x+3y=-1$或$2x-3y=-7$

解析 $4\left(x^2+4x\right)-9\left(y^2-2y\right)=-43\Rightarrow4(x+2)^2-9(y-1)^2=-43+16-9$

$\Rightarrow4(x+2)^2-9(y-1)^2=-36\Rightarrow-\dfrac{(x+2)^2}{9}+\dfrac{(y-1)^2}{4}=1$，

$\because$中心$(-2,1)$，$a=2$，$b=3$，上下型，$\therefore c=\sqrt{13}$.

(1)焦點$\left(-2,1\pm\sqrt{13}\right)$.

(2)$\left|\overline{PF_1}-\overline{PF_2}\right|=2a=4$.

(3) $m_{漸}=\pm\dfrac{a}{b}=\pm\dfrac{2}{3}$，又中心$(-2,1)$，$\therefore$漸近線方程式爲$y-1=\pm\dfrac{2}{3}(x+2)$

即$2x+3y=-1$或$2x-3y=-7$.

26. $\Gamma:\dfrac{x^2}{k-25}+\dfrac{y^2}{k-16}=1$，則

(1)若Γ表雙曲線，則k的範圍爲____________ .

(2)若Γ表過點$\left(1,2\sqrt{2}\right)$的雙曲線，則其斜率爲正的漸近線方程式爲____________ .

解答 (1)$16<k<25$;(2)$\sqrt{2}x-y=0$

解析 (1) 雙曲線分母異號，$(k-25)(k-16)<0 \Rightarrow 16<k<25$ ．

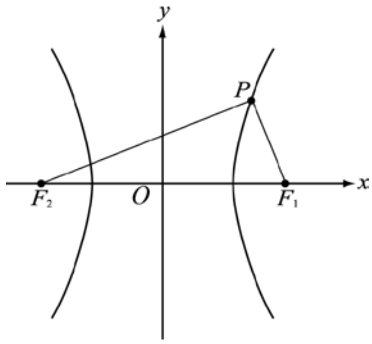
(2) $(1,2\sqrt{2})$ 代入雙曲線 $\Rightarrow \dfrac{1}{k-25}+\dfrac{8}{k-16}=1$

$$\Rightarrow k-16+8k-200=k^2-41k+400$$
$$\Rightarrow k^2-50k+616=0$$
$$\Rightarrow (k-22)(k-28)=0\text{，}$$

又 $16<k<25$，$\therefore$ 取 $k=22$，$\therefore \Gamma:-\dfrac{x^2}{3}+\dfrac{y^2}{6}=1$

$\Rightarrow$ 漸近線：$y-0=\pm\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{6}}(x-0)$　取正 $\Rightarrow y=\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{6}}x$，即 $\sqrt{2}x-y=0$ ．

27.設 P 爲雙曲線 $\dfrac{x^2}{9}-\dfrac{y^2}{16}=1$ 上的一點且位在第一象限．若 F_1、F_2 爲此雙曲線的兩個焦點，且 $\overline{PF_1}:\overline{PF_2}=1:3$，則 $\triangle F_1PF_2$ 的周長等於____________．



解答 22

解析 由 $\Gamma:\dfrac{x^2}{9}-\dfrac{y^2}{16}=1$ 知 $a=3$，$b=4$，$c=\sqrt{a^2+b^2}=5$，

依題意，設 $\overline{PF_1}=k$，$\overline{PF_2}=3k$，$k>0$，

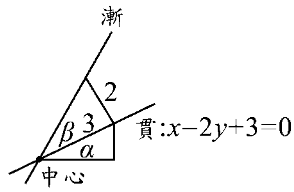
並由雙曲線的定義 $\left|\overline{PF_1}-\overline{PF_2}\right|=2a$，

得 $|k-3k|=6$ 即 $k=3$，又 $\overline{F_1F_2}=2c=10$，所以周長 $=3+9+10=22$ ．

28.已知雙曲線貫軸長爲 6，共軛軸長爲 4，貫軸方程式爲 $x-2y+3=0$，若其中一條漸近線的斜率爲 m 且 $m>0$，則 $m=$____________．

解答 $\dfrac{7}{4}$

解析 如圖，漸近線斜率 $m=\tan(\alpha+\beta)=\dfrac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}=\dfrac{\frac{1}{2}+\frac{2}{3}}{1-\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}}=\dfrac{\frac{7}{6}}{\frac{4}{6}}=\dfrac{7}{4}$ ．



29.請選擇符合各題敘述的圖形名稱，以(A)～(H)代號填入．

(A)拋物線　(B)橢圓　(C)雙曲線的一支　(D)雙曲線　(E)一線段

(F)兩射線　(G)一直線　(H)沒有圖形

(1)______在平面上，「到定直線 $L:x-4=0$ 的距離」是「到定點 $F(1,0)$ 之距離」的 2 倍之動點 P 所形成的圖形．

(2)______在平面上，「到定直線 $L:x+7=0$ 的距離」是比「到定點 $F(4,0)$ 的距離」多 1 之動點 P 所形成的圖形．

(3)______在平面上，與兩圓 $C_1:(x-3)^2+y^2=4$ 及 $C_2:(x+2)^2+y^2=1$ 均外切的動圓圓心 P 所形成的圖形．

(4)______在平面上，滿足 $\left|\sqrt{(x-3)^2+(y-2)^2}-\sqrt{(x+3)^2+(y-2)^2}\right|=8$ 的 $P(x,y)$ 所形成的圖形．

(5)______在平面上，$A(2,0)$，$B(0,2)$所有滿足$\overline{PA}+\overline{PB}=\sqrt{8}$的動點$P$所形成的圖形．

解答　(1)B;(2)A;(3)C;(4)H;(5)E

解析　(1) $\dfrac{|x-4|}{1}=2\sqrt{(x-1)^2+(y-0)^2}$

$\Rightarrow |x-4|^2=4\left[(x-1)^2+y^2\right]\Rightarrow\left(x^2-8x+16\right)=4\left(x^2-2x+1+y^2\right)$

$\Rightarrow 3x^2+4y^2=12$表橢圓，∴選(B)．

(2) $\dfrac{|x+7|}{1}=\sqrt{(x-4)^2+(y-0)^2}+1$

$\Rightarrow \pm(x+7)=\sqrt{(x-4)^2+y^2}+1$

$\Rightarrow (x+6)^2=(x-4)^2+y^2\Rightarrow y^2=20(x+1)$或

$\left[-(x+8)\right]^2=(x-4)^2+y^2\Rightarrow y^2=24(x+2)$皆表拋物線，∴選(A)．

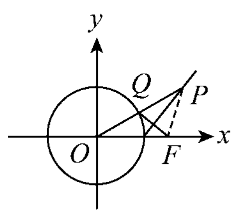
(3)設$O_1(3,0)$，$O_2(-2,0)$，動圓半徑r，則$\overline{PO_1}=r+2$，$\overline{PO_2}=r+1$，

∴$\overline{PO_1}-\overline{PO_2}=1=2a$表雙曲線的一支，∴選(C)．

(4)令$F(3,2)$，$F_2(-3,2)$，$2c=\overline{F_1F_2}=6<8=2a$沒有圖形，∴選(H)．

(5) $2c=\overline{AB}=\sqrt{4+4}=\sqrt{8}=2a$表一線段$\overline{AB}$，∴選(E)．

30.在圖中，圓O的圓心爲原點、半徑爲4，F的坐標爲$(6,0)$，Q在圓O上，P點爲$\overline{FQ}$的中垂線與直線$\overleftrightarrow{OQ}$的交點，當Q在圓O上移動時，求動點P的軌跡方程式爲______________．



解答　$\dfrac{(x-3)^2}{4}-\dfrac{y^2}{5}=1$

解析　$\overline{PQ}=\overline{PF}$，$\overline{PO}=\overline{PQ}+\overline{OQ}=\overline{PQ}+4=\overline{PF}+4\Rightarrow\left|\overline{PO}-\overline{PF}\right|=4$，

即以$O(0,0)$，$F(6,0)$爲兩焦點的雙曲線且$2a=4$

$\Rightarrow$中心$(3,0)$且爲左右型，又$2c=\overline{OF}=6\Rightarrow c=3$且$a=2$，∴$b=\sqrt{5}$，

∴軌跡方程式爲$\dfrac{(x-3)^2}{4}-\dfrac{y^2}{5}=1$．

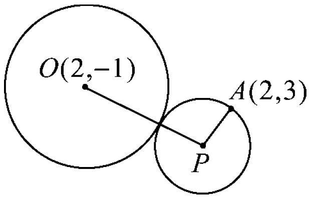
31.已知圓$C:(x-2)^2+(y+1)^2=9$及兩點$A(2,3)$，$B(0,-1)$，則

(1)過點A且與圓C相切的圓之圓心形成的圖形方程式爲____________．
(2)過點B且與圓C相切的圓之圓心形成的圖形方程式爲____________．

解答 (1) $-\frac{(x-2)^2}{\frac{7}{4}}+\frac{(y-1)^2}{\frac{9}{4}}=1$;(2) $\frac{(x-1)^2}{\frac{9}{4}}+\frac{(y+1)^2}{\frac{5}{4}}=1$

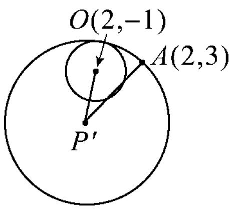
解析 (1)①

$$\begin{array}{rl} & \overline{PO}=r+3 \\ -) & \overline{PA}=r \\ \hline & \overline{PO}-\overline{PA}=3 \end{array}$$



②

$$\begin{array}{rl} & \overline{P'O}=r-3 \\ -) & \overline{P'A}=r \\ \hline & \overline{P'O}-\overline{P'A}=-3 \end{array}$$



由①② $\Rightarrow \left|\overline{PO}-\overline{PA}\right|=3\cdots\cdots$雙曲線,

$\therefore$中心$(2,1)$, $a=\frac{3}{2}$, $c=\frac{\overline{AO}}{2}=2\Rightarrow b^2=4-\frac{9}{4}=\frac{7}{4}$且上下型,

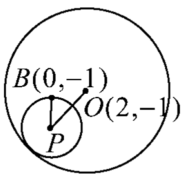
故雙曲線:$-\frac{(x-2)^2}{\frac{7}{4}}+\frac{(y-1)^2}{\frac{9}{4}}=1$.

(2)

$$\begin{array}{rl} & \overline{PO}=3-r \\ +) & \overline{PB}=r \\ \hline & \overline{PO}+\overline{PB}=3\cdots\cdots \text{橢} \end{array}$$

$\therefore$中心$(1,-1)$, $a=\frac{3}{2}$, $c=\frac{\overline{BO}}{2}=1\Rightarrow b^2=\frac{9}{4}-1=\frac{5}{4}$且左右型,

$\therefore$橢圓:$\frac{(x-1)^2}{\frac{9}{4}}+\frac{(y+1)^2}{\frac{5}{4}}=1$.



32.已知橢圓與雙曲線$\dfrac{(x+1)^2}{4}-y^2=1$共焦點，且橢圓的正焦弦長度等於 1，則橢圓的方程式爲_____．

解答 $\dfrac{(x+1)^2}{\frac{25}{4}}+\dfrac{y^2}{\frac{5}{4}}=1$

解析 雙曲線：中心$(-1,0)$，$c^2=4+1=5$，左右型，

橢圓：中心$(-1,0)$，$c^2=5$，左右型，又$\begin{cases}a^2=b^2+5\\ \dfrac{2b^2}{a}=1\end{cases}\Rightarrow\dfrac{2(a^2-5)}{a}=1\Rightarrow 2a^2-a-10=0$，

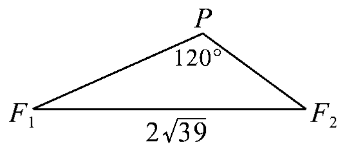
$\therefore a=\dfrac{5}{2}$，$b^2=\dfrac{a}{2}=\dfrac{5}{4}$，故橢圓：$\dfrac{(x+1)^2}{\frac{25}{4}}+\dfrac{y^2}{\frac{5}{4}}=1$．

33.設F_1、F_2爲雙曲線$\dfrac{x^2}{9}-\dfrac{y^2}{30}=1$的兩個焦點，且$P$爲雙曲線上一點，若$\angle F_1PF_2=120^\circ$，則$\triangle PF_1F_2$的最短邊長度爲___________．

解答 4

解析 $a^2=9\Rightarrow a=3\Rightarrow 2a=6$，$c^2=a^2+b^2=9+30=39\Rightarrow c=\sqrt{39}$，

設$\overline{PF}_1=\ell$，則$\overline{PF}_2=\ell-6$，



$\therefore\cos120^\circ=\dfrac{\ell^2+(\ell-6)^2-(2\sqrt{39})^2}{2\ell(\ell-6)}=-\dfrac{1}{2}$

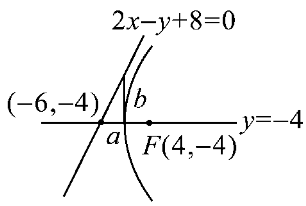
$\Rightarrow 2\ell^2-12\ell-120=-(\ell^2-6\ell)\Rightarrow 3\ell^2-18\ell-120=0\Rightarrow$

$\ell^2-6\ell-40=0\Rightarrow(\ell-10)(\ell+4)=0$，$\therefore\ell=10$，故所求爲$10-6=4$．

34.有一雙曲線A的貫軸方程式是$y+4=0$，且點$(4,-4)$是一個焦點；若直線$2x-y+8=0$是A的一條漸近線，則A的方程式爲___________．

解答 $\dfrac{(x+6)^2}{20}-\dfrac{(y+4)^2}{80}=1$

解析 貫軸$y+4=0$與漸近線$2x-y+8=0$的交點爲中心$(-6,-4)\Rightarrow c=10$，



$m_{漸}=\dfrac{b}{a}=2$，$\therefore$設$a=k$，$b=2k$，

又$c^2=a^2+b^2\Rightarrow100=k^2+4k^2\Rightarrow k^2=20$，$\therefore a^2=20$，$b^2=80$，

故雙曲線方程式爲$\dfrac{(x+6)^2}{20}-\dfrac{(y+4)^2}{80}=1$．

35.設圓$C:(x-1)^2+y^2=16$，$A(-1,0)$，$B(7,0)$，則

(1)通過A且與圓C相切的所有圓的圓心軌跡方程式爲___________．

(2)通過 B 且與圓 C 相切的所有圓的圓心軌跡方程式爲____________．

解答 (1) $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$;(2) $\frac{(x-4)^2}{4}-\frac{y^2}{5}=1$

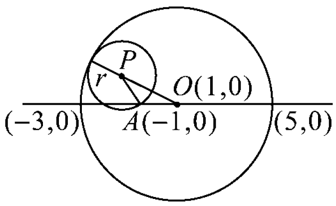
解析 (1) $\overline{PA}=r$， $\overline{PO}=4-r$，

$\overline{PA}+\overline{PO}=4=2a \Rightarrow a=2$，

以 $A(-1,0)$， $O(1,0)$ 爲兩焦點 $\Rightarrow$ 中心 $(0,0)$，

又 $2c=\overline{AO}=2 \Rightarrow c=1$， $a^2=b^2+c^2 \Rightarrow 4=b^2+1 \Rightarrow b^2=3$ 且爲左右型，

$\therefore$ 軌跡方程式爲 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$ ．

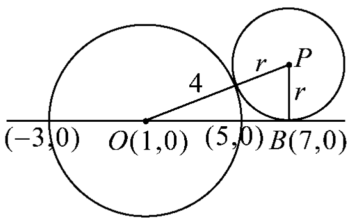


(2) $\overline{PB}=r$， $\overline{PO}=4+r$， $\left|\overline{PO}-\overline{PB}\right|=4=2a \Rightarrow a=2$，

以 $B(7,0)$， $O(1,0)$ 爲兩焦點 $\Rightarrow$ 中心 $(4,0)$， 又 $2c=\overline{BO}=6 \Rightarrow c=3$，

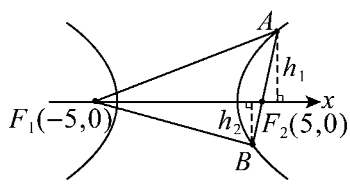
又 $c^2=a^2+b^2 \Rightarrow 9=4+b^2 \Rightarrow b^2=5$ 且爲左右型，

$\therefore$ 軌跡方程式爲 $\frac{(x-4)^2}{4}-\frac{y^2}{5}=1$ ．



36.設 $F_1(-5,0)$， $F_2(5,0)$ 爲 $\Gamma:\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$ 的兩焦點，若 $\overline{AB}$ 爲過 F_2 的任一焦弦，則 $\triangle ABF_1$ 面積的最小值爲__________．

解答 $\frac{45}{2}$



解析 $\triangle ABF_1=\triangle AF_1F_2+\triangle BF_1F_2=\frac{1}{2}\overline{F_1F_2}\times h_1+\frac{1}{2}\overline{F_1F_2}\times h_2$

$=\frac{1}{2}\overline{F_1F_2}(h_1+h_2)\geq\frac{1}{2}\overline{F_1F_2}\times$ 正焦弦長

$=\frac{1}{2}\times 10\times\frac{2\times 9}{4}=\frac{45}{2}$ ．

37.以橢圓 $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{16}=1$ 的焦點爲頂點，長軸頂點爲焦點的雙曲線爲 Γ，則 Γ 的共軛雙曲線方程式爲

__________.

解答 $\dfrac{x^2}{9}-\dfrac{y^2}{7}=1$

解析 橢圓長軸頂點$(0,\pm 4)$，焦點$(0,\pm\sqrt{7})\Rightarrow$雙曲線$\Gamma$焦點$(0,\pm 4)$，頂點$(0,\pm\sqrt{7})$

$$\Rightarrow \Gamma:-\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{7}=1\Rightarrow \Gamma \text{ 的共軛雙曲線爲 } \frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{7}=1.$$

38.已知兩圓$C_1:x^2+y^2=16$，$C_2:(x-10)^2+y^2=4$，若動圓C與C_1、C_2均相切，則此動圓C的圓心軌跡方程式爲____________.

解答 $\dfrac{(x-5)^2}{1}-\dfrac{y^2}{24}=1$，$\dfrac{(x-5)^2}{9}-\dfrac{y^2}{16}=1$

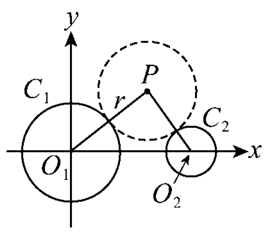
解析 ①均外切 ②均內切

$$\begin{cases}\overline{PO_1}=r+4\\ \overline{PO_2}=r+2\end{cases} \qquad \begin{cases}\overline{PO_1}=r-4\\ \overline{PO_2}=r-2\end{cases}$$

$\because \left|\overline{PO_1}-\overline{PO_2}\right|=2<\overline{O_1O_2}$，

$\therefore P$點軌跡爲雙曲線以O_1，O_2爲焦點

$\Rightarrow$中心$(5,0)$，$a=1$，$c^2=a^2+b^2\Rightarrow b^2=25-1=24$， 故方程式爲$\dfrac{(x-5)^2}{1}-\dfrac{y^2}{24}=1$.



③ C_1:內切，C_2:外切 ④ C_1:外切，C_2:內切

$$\begin{cases}\overline{PO_1}=r-4\\ \overline{PO_2}=r+2\end{cases} \qquad \begin{cases}\overline{PO_1}=r+4\\ \overline{PO_2}=r-2\end{cases}$$

$\because \left|\overline{PO_1}-\overline{PO_2}\right|=6<\overline{O_1O_2}$，$\therefore P$點軌跡爲雙曲線，以$O_1$，$O_2$爲焦點

$\Rightarrow$中心$(5,0)$，$a=3$，$b^2=25-9=16$， 故方程式爲$\dfrac{(x-5)^2}{9}-\dfrac{y^2}{16}=1$.

39.設k爲實數，若方程式$\dfrac{x^2}{10-k}+\dfrac{(y+1)^2}{5-k}=1$爲雙曲線，則此雙曲線的焦點坐標爲____________.（有兩解）

解答 $(\sqrt{5},-1)$或$(-\sqrt{5},-1)$

解析 (1)中心$(0,-1)$且爲左右型，又$c^2=(10-k)+(k-5)=5\Rightarrow c=\sqrt{5}$，

$\therefore$焦點$(\sqrt{5},-1)$或$(-\sqrt{5},-1)$．

(2)上下型，$c^2=(5-k)+(k-10)=-5$（不合）．

40.雙曲線$x^2-2x-4y^2-8y+1=0$上一點$\left(1+\sqrt{5},\dfrac{1}{2}\right)$到兩漸近線的距離乘積爲__________．

解答 $\dfrac{4}{5}$

解析 $x^2-2x-4y^2-8y+1=0\Rightarrow (y+1)^2-\dfrac{(x-1)^2}{4}=1$

$\Rightarrow a=1$，$b=2$，$c=\sqrt{5}$，$\therefore$所求爲$\dfrac{a^2b^2}{a^2+b^2}=\dfrac{4}{5}$．

41.與橢圓$\dfrac{(x-1)^2}{9}+\dfrac{(y+2)^2}{4}=1$共焦點且共軛軸長爲 4 的雙曲線方程式爲__________．

解答 $\dfrac{(x-1)^2}{1}-\dfrac{(y+2)^2}{4}=1$

解析 橢圓：中心$(1,-2)$，$c^2=9-4=5$，左右型，

雙曲線：中心$(1,-2)$，$c^2=5$，左右型，

又$2b=4\Rightarrow b=2$，$\therefore a^2=c^2-b^2=1$，

$\therefore$雙曲線方程式爲$\dfrac{(x-1)^2}{1}-\dfrac{(y+2)^2}{4}=1$．

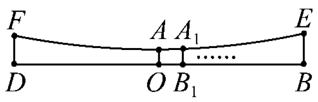
42.一雙曲線的中心爲$(2,3)$，貫軸平行y軸，共軛軸長爲 4，一漸近線之斜率爲 1，則此雙曲線方程式爲__________．

解答 $\dfrac{(y-3)^2}{4}-\dfrac{(x-2)^2}{4}=1$

解析 漸近線的斜率爲 1$\Rightarrow a=b$又$2b=4\Rightarrow b=2$，$a=2$，且爲上下型，中心$(2,3)$，

$\therefore$雙曲線方程式爲$\dfrac{(y-3)^2}{4}-\dfrac{(x-2)^2}{4}=1$．

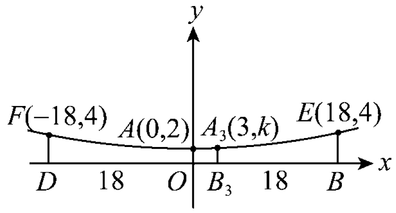
43.如圖，兩山之間有一座吊橋，橋面$\overline{BD}$用鋼索FAE懸吊，鋼索FAE所形成的曲線爲雙曲線的一部分，其中A爲雙曲線的一頂點，O爲雙曲線的中心，O在$\overline{BD}$上，$\overline{OA}\perp\overline{BD}$，$\overline{OA}=2$公尺，而橋長$\overline{BD}=36$公尺，$\overline{OB}=\overline{OD}$，$\overline{DF}=\overline{BE}=4$公尺，且從$O$起每隔 1 公尺有一根與橋面垂直的拉索$\overline{A_iB_i}$（$i=1$，2，3，……）；則$\overline{A_3B_3}=$__________公尺．



$\boxed{\text{解答}}$ $\sqrt{\dfrac{13}{3}}$

$\boxed{\text{解析}}$ 設方程式$-\dfrac{x^2}{b^2}+\dfrac{y^2}{4}=1$，代入$(18,4)$，$\therefore -\dfrac{18^2}{b^2}+\dfrac{4^2}{4}=1 \Rightarrow b^2=108$，

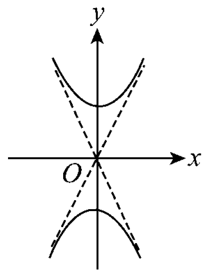
$\therefore$方程式爲$-\dfrac{x^2}{108}+\dfrac{y^2}{4}=1$代入$(3,k) \Rightarrow \dfrac{-9}{108}+\dfrac{k^2}{4}=1$， $k>0 \Rightarrow k=\overline{A_3B_3}=\sqrt{\dfrac{13}{3}}$.



44. $P(x,y)$與直線$y=1$的距離爲d，若$A(0,4)$且$\overline{AP}=2d$，則x^2+y^2的最小值爲____________ .

$\boxed{\text{解答}}$ 4

$\boxed{\text{解析}}$ $d=\dfrac{|y-1|}{\sqrt{1+0}}=|y-1|$， $\overline{AP}=\sqrt{x^2+(y-4)^2}=2d=2|y-1|$



$\overset{\text{平方}}{\Rightarrow} x^2+(y-4)^2=4(y-1)^2 \Rightarrow x^2+y^2-8y+16=4y^2-8y+4 \Rightarrow x^2-3y^2+12=0$，

$\therefore x^2=3y^2-12\ge 0 \Rightarrow 3y^2-12\ge 0$， $y\ge 2$或$y\le -2$，

$x^2+y^2=3y^2-12+y^2=4y^2-12$，

$\therefore$當$y=\pm 2$時，有最小值爲 4 .

45.設$\Gamma:\left|\sqrt{(x-4)^2+y^2}-\sqrt{x^2+(y+4)^2}\right|=4$，則

(1)共軛軸的長爲____________ . (2)頂點坐標爲____________ .

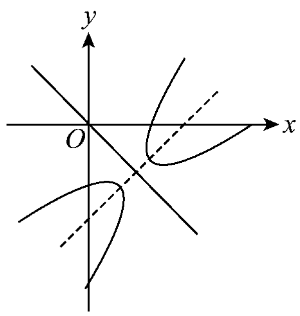
$\boxed{\text{解答}}$ (1)4;(2)$\left(2+\sqrt{2},-2+\sqrt{2}\right)$， $\left(2-\sqrt{2},-2-\sqrt{2}\right)$

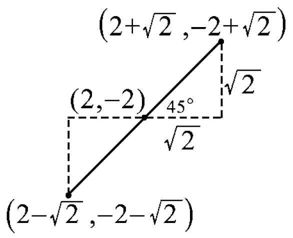
$\boxed{\text{解析}}$ (1)焦點$F_1(4,0)$， $F_2(0,-4)$，

$\therefore 2c=\overline{F_1F_2}=\sqrt{16+16}=4\sqrt{2} \Rightarrow c=2\sqrt{2}$，又$2a=4 \Rightarrow a=2$，

$\because c^2=a^2+b^2 \Rightarrow 8=4+b^2 \Rightarrow b^2=4 \Rightarrow 2b=4$.

(2)





$\because$中心$(2,-2)$，且$\overrightarrow{F_2F_1}=(4-0,0+4)=4(1,1)$，二頂點$(2,-2)\pm 2\times\dfrac{(1,1)}{\sqrt{2}}$

$\therefore$頂點$\left(2+\sqrt{2},-2+\sqrt{2}\right)$， $\left(2-\sqrt{2},-2-\sqrt{2}\right)$.

46. $P(x,y)$ 在 $\dfrac{x^2}{4^2}-\dfrac{y^2}{2^2}=1$ 上，則 $x+2y^2$ 的最小值爲____________ .

$\boxed{\text{解答}}$ -4

$\boxed{\text{解析}}$ $\dfrac{x^2}{16}-\dfrac{y^2}{4}=1\overset{\times 8}{\Rightarrow}\dfrac{x^2}{2}-2y^2=8\Rightarrow 2y^2=\dfrac{x^2}{2}-8\geq 0\Rightarrow x\geq 4$ 或 $x\leq -4$ ，

代入 $x+2y^2=x+\dfrac{x^2}{2}-8=\dfrac{1}{2}(x+1)^2-\dfrac{17}{2}$ 　且（ $x\geq 4$ 或 $x\leq -4$ ），

$\therefore x=-4$ 代入得 $x+2y^2$ 的最小值爲 $\dfrac{1}{2}\times(-3)^2-\dfrac{17}{2}=-4$.

47.設 $\Gamma:\dfrac{x^2}{27}+\dfrac{y^2}{12}=1$ ， F_1 、 F_2 爲其兩焦點．若 Γ 上有一點 P 滿足 $\overline{PF_1}\perp\overline{PF_2}$ ，且 P 在與此橢圓共焦點的一雙曲線上，則雙曲線方程式爲____________ .

$\boxed{\text{解答}}$ $\dfrac{x^2}{3}-\dfrac{y^2}{12}=1$

$\boxed{\text{解析}}$ $\because a^2=b^2+c^2\Rightarrow 27=12+c^2\Rightarrow c^2=15\Rightarrow c=\sqrt{15}$ ，又 $a^2=27\Rightarrow a=3\sqrt{3}$ ，

$\because \overline{PF_1}+\overline{PF_2}=2a=6\sqrt{3}$ ，設 $\overline{PF_2}=t$ ，則 $\overline{PF_1}=6\sqrt{3}-t$ ，

又 $\angle F_1PF_2=90^\circ$ ， $\therefore \overline{PF_1}^2+\overline{PF_2}^2=\overline{F_1F_2}^2\Rightarrow\left(6\sqrt{3}-t\right)^2+t^2=\left(2\sqrt{15}\right)^2\Rightarrow t^2-6\sqrt{3}t+24=0$

$\Rightarrow\left(t-4\sqrt{3}\right)\left(t-2\sqrt{3}\right)=0\Rightarrow t=4\sqrt{3}$ 或 $2\sqrt{3}$ ，

又 P 在雙曲線上，

$\because \overline{PF_2}=2\sqrt{3}$ ， $\overline{PF_1}=4\sqrt{3}$ ， $\therefore \overline{PF_1}-\overline{PF_2}=2\sqrt{3}=2a\Rightarrow a=\sqrt{3}$ ， $a^2=3$ ，

又 $a^2+b^2=c^2\Rightarrow\left(\sqrt{3}\right)^2+b^2=\left(\sqrt{15}\right)^2\Rightarrow b^2=12$ ， $\therefore$ 雙曲線方程式爲 $\dfrac{x^2}{3}-\dfrac{y^2}{12}=1$.