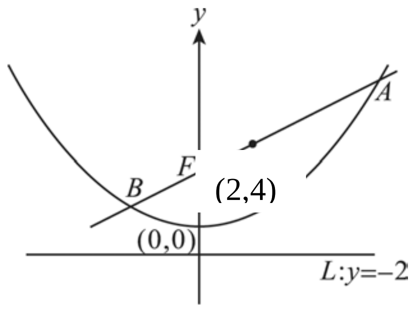
高雄市明誠中學 高二數學平時測驗					日期：100.03.03
範圍	1-2 拋物線 B	班級	二年____班	姓名	
		座號			

一、填充題 (每題 10 分)

1. A、B 兩點在拋物線 $y=\frac{1}{8}x^2$ 上，且 $\overline{AB}$ 的中點坐標爲 $(2,4)$，若 F 爲拋物線的焦點，則 $\overline{AF}+\overline{BF}=$ ____________ .

解答 12



解析 原式 $\Rightarrow x^2=8y\Rightarrow$ 頂點 $(0,0)$， $c=2$，開口向上，

設 $A(x_1,y_1)$， $B(x_2,y_2)$，

$$(2,4)=(\frac{x_1+x_2}{2},\frac{y_1+y_2}{2})\Rightarrow y_1+y_2=8$$

$$\therefore \overline{AF}+\overline{BF}=d(A,L)+d(B,L)$$

$$=(y_1+c)+(y_2+c)=(y_1+y_2)+2c=8+4=12 \ .$$

2.已知直線 $y=-x-k$ 是拋物線 $x^2+x-3y-5=0$ 的切線，則 (1)$k=$________ . (2)切點爲____________ .

解答 (1)3;(2)$(-2,-1)$

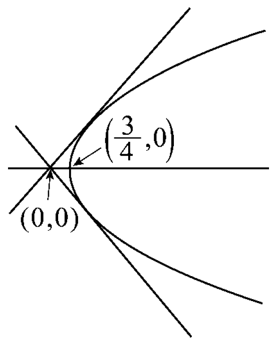
解析 (1) $y=-x-k$ 代入拋物線方程式 $\Rightarrow x^2+x-3(-x-k)-5=0\Rightarrow x^2+4x+3k-5=0$，

$\because$相切，$\therefore D=0$，$\therefore k=3$.

(2) $x^2+4x+4=0\Rightarrow(x+2)^2=0$， $\therefore x=-2$，故切點 $(-2,-1)$.

3.過原點且與拋物線 $\Gamma: y^2=4x-3$ 恰有一交點的直線有____________條 .

解答 3



解析 $y^2=4\left(x-\frac{3}{4}\right)$，$\therefore$3 條 .

4.直線 $kx+y=1$ 與拋物線 $x^2=-8y$ 相切，則 $k=$____________ .

解答 $\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$

解析 $y=1-kx$ 代入拋物線方程式 $\Rightarrow x^2=-8(1-kx)\Rightarrow x^2-8kx+8=0$，

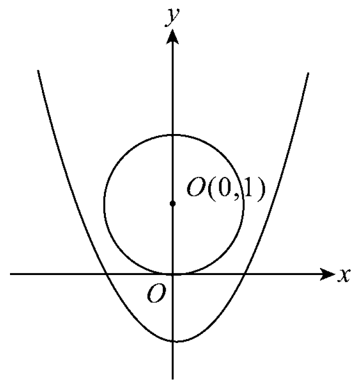
$\because$相切，$\therefore D=0\Rightarrow 64k^2-32=0\Rightarrow k^2=\frac{1}{2}$，$\therefore k=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$.

5.若 P 爲拋物線 $\Gamma: y=x^2-1$ 上的動點， Q 爲圓 $C: x^2+(y-1)^2=1$ 上的動點，則

(1) $\overline{PQ}$ 的最小值爲____________ . (2)當 $\overline{PQ}$ 有最小值時， P 點的 y 坐標爲____________ .

解答 (1) $\frac{\sqrt{7}}{2}-1$;(2) $\frac{1}{2}$

解析 (1)設 $P(t,t^2-1)$，圓心 $O(0,1)$，



$\therefore \overline{PQ}=\overline{PO}-r=\sqrt{t^2+(t^2-2)^2}-1$

$=\sqrt{t^4-3t^2+4}-1=\sqrt{\left(t^2-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{7}{4}}-1$，

$\therefore t^2=\frac{3}{2}$時，$\overline{PQ}$的最小值爲$\sqrt{\frac{7}{4}}-1=\frac{\sqrt{7}}{2}-1$ ．

(2) P 點的 y 坐標爲 $t^2-1=\frac{3}{2}-1=\frac{1}{2}$ ．

6.拋物線 $y=-x^2+5x+3$ 的一切線 L 且垂直 $x-3y=5$，則 L 的方程式爲____________．

解答 $3x+y=19$

解析 設 $L:3x+y=k\Rightarrow y=k-3x$ 代入拋物線，

$(k-3x)=y=-x^2+5x+3\Rightarrow x^2-8x+(k-3)=0$，

$\because$相切，$\therefore D=0\Rightarrow(-8)^2-4(k-3)=0\Rightarrow k=19$，$\therefore L:3x+y=19$ ．

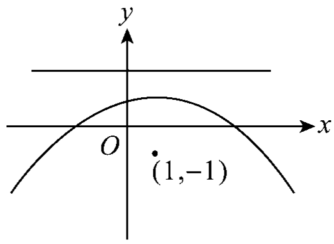
7.焦點爲 $(1,-1)$，準線垂直於 y 軸，正焦弦長爲 8 的拋物線方程式爲____________．

解答 $(x-1)^2=-8(y-1)$ 或 $(x-1)^2=8(y+3)$

解析 $\because 4|c|=8\Rightarrow c=\pm2$，

① $c=-2$，頂點 $(1,1)$，

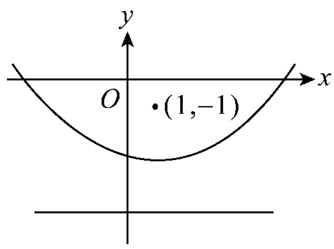
$\therefore$方程式爲 $(x-1)^2=-8(y-1)$ ．（如圖一）



〈圖一〉

② $c=2$，頂點 $(1,-3)$，

$\therefore$方程式爲 $(x-1)^2=8(y+3)$ ．（如圖二）



〈圖二〉

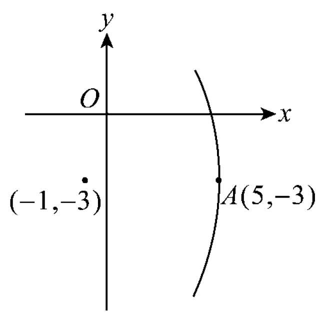
由①②可知，

拋物線方程式爲 $(x-1)^2=-8(y-1)$ 或 $(x-1)^2=8(y+3)$ ．

8.已知 $A(5,-3)$，$B(-1,-3)$ 爲平面上兩點，則以 A 爲頂點，B 爲焦點的拋物線方程式爲____________．

解答 $(y+3)^2=-24(x-5)$

解析 如圖，$c=-6$，$\therefore$拋物線方程式爲 $(y+3)^2=-24(x-5)$ ．



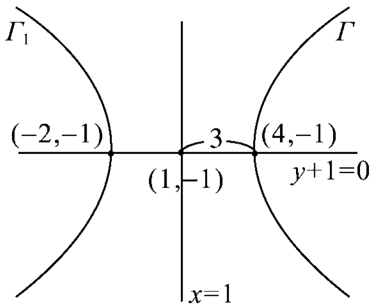
9.有一拋物線 Γ 的對稱軸爲 $y+1=0$ 且準線爲 $x=1$；若 Γ 的正焦弦長是 12，則 Γ 的方程式爲____________．

解答 $(y+1)^2=12(x-4)$，$(y+1)^2=-12(x+2)$

解析 $4|c|=12\Rightarrow c=\pm 3$，

$\therefore \Gamma:(y+1)^2=12(x-4)$，

$\Gamma_1:(y+1)^2=-12(x+2)$.



10.設 L 為過點 $(-1,0)$ 且斜率為 m 的直線，若 L 與拋物線 $y^2=4x$ 相交於相異兩點，則 m 的範圍為___ .

解答 $-1<m<1$, $m\neq 0$

解析 設 $L: y=m(x+1)$，$\therefore x=\dfrac{y-m}{m}$ ($m\neq 0$)，代入 $y^2=4x$

$\Rightarrow y^2=4\cdot\dfrac{y-m}{m}\Rightarrow my^2-4y+4m=0$，

$\because$有兩相異實根，$\therefore D>0$

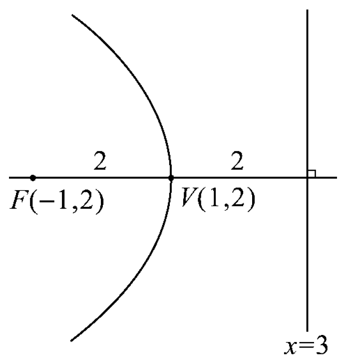
$\Rightarrow 16-4m\cdot 4m>0\Rightarrow 1-m^2>0\Rightarrow m^2-1<0$，

$\therefore -1<m<1$. $m\neq 0$

11.已知拋物線頂點 $(1,2)$，焦點 $(-1,2)$，則準線方程式為____________ .

解答 $x=3$

解析 如圖，

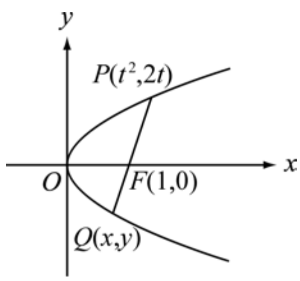


準線方程式為 $x=3$.

12.在坐標平面上，過 $F(1,0)$ 的直線交拋物線 $\Gamma: y^2=4x$ 於 P、Q 兩點，其中 P 在上半平面，且知 $2\overline{PF}=3\overline{QF}$，則 P 點的 x 坐標為____________ .

解答 $\dfrac{3}{2}$

解析 設 $P(t^2,2t)$，$Q(x,y)$，



利用分點公式，

$1=\dfrac{3x+2t^2}{5}\Rightarrow x=\dfrac{1}{3}(5-2t^2)$，

$0=\dfrac{3y+4t}{5}\Rightarrow y=-\dfrac{4}{3}t$，

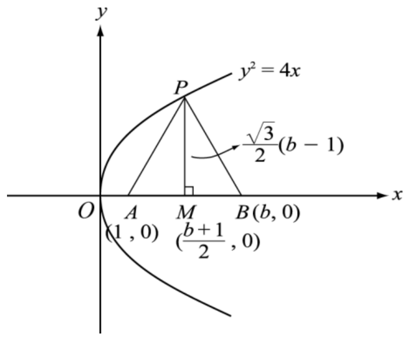
$Q\left(\dfrac{5}{3}-\dfrac{2}{3}t^2,-\dfrac{4}{3}t\right)$代入 $y^2=4x$，得 $\left(-\dfrac{4}{3}t\right)^2=4\cdot\left(\dfrac{5}{3}-\dfrac{2}{3}t^2\right)\Rightarrow t^2=\dfrac{15}{10}=\dfrac{3}{2}$

$\therefore P$ 點之 x 坐標為 $\dfrac{3}{2}$.

13.設$A(1,0)$與$B(b,0)$為坐標平面上的兩點，其中$b>1$．若拋物線$\Gamma: y^2=4x$上有一點P使得$\triangle ABP$為一正三角形，則$b=$____________．

解答 5

解析 如圖，在第一、四象限上各有一點P，



可使$\triangle ABP$為正三角形且兩點互相對稱於x軸，

又因$\triangle ABP$是邊長為$b-1$的正三角形，

所以P點的坐標為$\left(\dfrac{b+1}{2},\pm\dfrac{\sqrt{3}(b-1)}{2}\right)$，

由於P點在$\Gamma: y^2=4x$上，

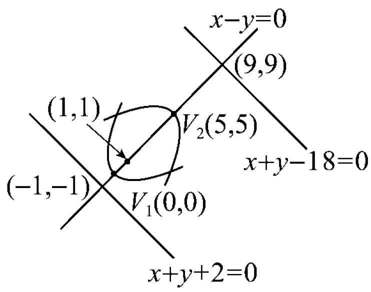
代入得$\dfrac{3}{4}(b-1)^2=4\left(\dfrac{b+1}{2}\right)$，

化簡 $3b^2-14b-5=0$， $b=-\dfrac{1}{3}$或5，又$b>1$，所以$b=5$．

14.設k為一常數，已知拋物線$\Gamma:\sqrt{(x-1)^2+(y-1)^2}=\left|\dfrac{x+y+k}{\sqrt{2}}\right|$，且過點$(8,0)$，則$\Gamma$的頂點坐標為____________．

解答 $(0,0)$或$(5,5)$

解析 $\because \Gamma$過點$(8,0)\Rightarrow\sqrt{7^2+1^2}=\left|\dfrac{8+0+k}{\sqrt{2}}\right|\Rightarrow|k+8|=5\sqrt{2}\times\sqrt{2}=10$



$\Rightarrow k+8=10$或$-10\Rightarrow k=2$或-18

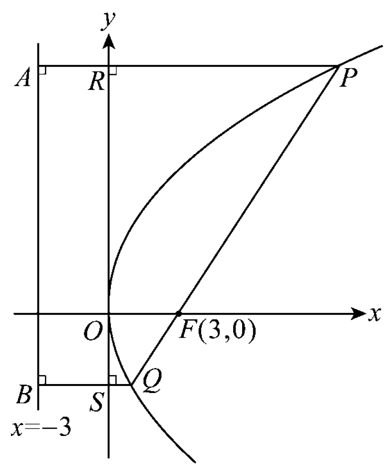
$\Rightarrow$準線： $x+y+2=0$或$x+y-18=0$， 焦點為$(1,1)$，

由圖知Γ的頂點坐標為$V_1(0,0)$或$V_2(5,5)$．

15.過$F(3,0)$的直線交拋物線$y^2=12x$於P、Q兩點，過P、Q兩點作y軸垂線，分別交y軸於R、S，若$\overline{PF}:\overline{FQ}=3:1$，則梯形$PQSR$的面積為____________．

解答 $40\sqrt{3}$

解析 $y^2=12x\Rightarrow(y-0)^2=4\cdot3\cdot(x-0)$，設$P(3t^2,6t)$



$\Rightarrow\overline{PA}:\overline{QB}=\overline{PF}:\overline{QF}=3:1$

$\overline{PA}=3t^2+3\Rightarrow\overline{QB}=\dfrac{1}{3}\overline{PA}=t^2+1$

$\Rightarrow Q(t^2-2,-2t)$代入$y^2=12x$

$\Rightarrow 4t^2=12\times(t^2-2)$

$\Rightarrow 8t^2=24\Rightarrow t^2=3\Rightarrow t=\pm\sqrt{3}$,

取 $t=\sqrt{3}\Rightarrow P\left(9,6\sqrt{3}\right)$， $Q\left(1,-2\sqrt{3}\right)$，

$\therefore$ 所求面積 $=\dfrac{1}{2}\times(9+1)\times\left(6\sqrt{3}+2\sqrt{3}\right)=40\sqrt{3}$.

16.與直線 $L:x+12=0$ 相切且與圓 $C:x^2+y^2=16$ 相切的圓其圓心軌跡方程式為＿＿＿＿＿＿ .

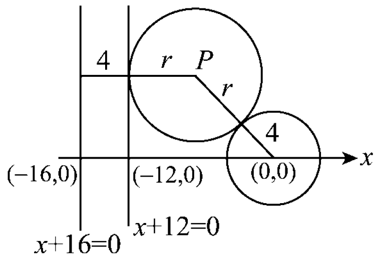
解答　$y^2=32(x+8)$ 或 $y^2=16(x+4)$

解析　設圓心為 P，半徑為 r，

①與圓 C 外切，

由圖知：即以 $(0,0)$ 為焦點， $x+16=0$ 為準線的拋物線

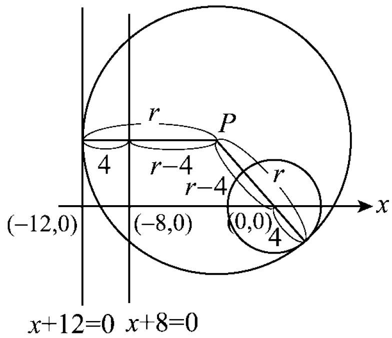
$\Rightarrow$ 頂點 $(-8,0)$， $c=8$，開口向右，　$\therefore$ 方程式為 $y^2=32(x+8)$.



②與圓 C 內切，

由圖知：即以 $(0,0)$ 為焦點， $x+8=0$ 為準線的拋物線

$\Rightarrow$ 頂點 $(-4,0)$， $c=4$，開口向右，　$\therefore$ 方程式為 $y^2=16(x+4)$.



由①②可知，方程式為 $y^2=32(x+8)$ 或 $y^2=16(x+4)$.

17.在坐標平面上，過 $F(1,0)$ 的直線交拋物線 $y^2=4x$ 於 P 、 Q 兩點， P 在上半平面且 $\overline{PF}=2\overline{QF}$，

則 P 的 x 坐標為＿＿＿＿＿＿ .

解答　2

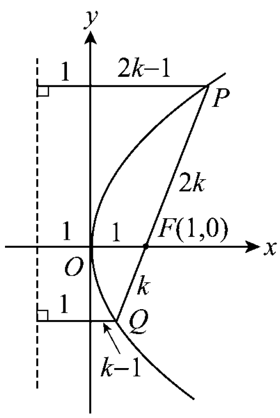
解析　$\because \overline{PF}=2\overline{QF}$， $\therefore$ 設 $\overline{PF}=2k$， $\overline{QF}=k$，

$\therefore P(2k-1,y_1)$， $Q(k-1,y_2)$，

由分點公式： $1=\dfrac{2(k-1)+(2k-1)}{3}$

$\Rightarrow 3=4k-3$， $k=\dfrac{3}{2}$，

故所求為 $2k-1=3-1=2$.



18.方程式$\sqrt{(x-3)^2+(y-1)^2}=\dfrac{|x-y+2|}{\sqrt{2}}$所表示的圖形爲拋物線，其頂點爲____________．

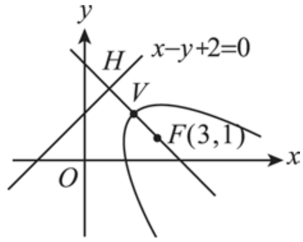
解答　$(2,2)$

解析　焦點$F(3,1)$，準線：$x-y+2=0$，如圖，

設軸方程式爲$x+y=k$，

$(3,1)$代入得$k=4$，∴軸：$x+y-4=0$，解

$\begin{cases}x-y+2=0\\x+y-4=0\end{cases}\Rightarrow H(1,3)$，$\overline{FH}$的中點即爲頂點$V(2,2)$．



19.已知拋物線$\Gamma:(x-1)^2=4(y+1)$，L爲過點$(0,-3)$與Γ相切的直線，其斜率小於0，則

(1)直線L的方程式爲____________．(2)切點坐標爲____________．

解答　(1) $y=-2x-3$;(2) $(-3,3)$

解析　(1)設切線方程式爲$y+3=m(x-0)$，∴ $y=mx-3$代入Γ

$\Rightarrow(x-1)^2=4(mx-2)\Rightarrow x^2+(-2-4m)x+9=0$，

∵相切，∴ $D=0\Rightarrow(-2-4m)^2-4\cdot1\cdot9=0$，∴ $-2-4m=\pm6$，

又$m<0$，∴取$m=-2$，故切線方程式爲$y=-2x-3$．

(2) $x^2+6x+9=0\Rightarrow(x+3)^2=0$，∴ $x=-3$，故切點$(-3,3)$．

20.設$A(-1,0)$，$B(0,2)$，P是拋物線$y^2=4x$上的動點，則△ABP面積的最小值爲____________．

解答　$\dfrac{3}{4}$

解析　設$P(t^2,2t)$，$\overrightarrow{AB}=(1,2)$，$\overrightarrow{AP}=(t^2+1,2t)$，

$\therefore\triangle ABP=\dfrac{1}{2}\left|\begin{vmatrix}1&2\\t^2+1&2t\end{vmatrix}\right|=\dfrac{1}{2}\left|2t-2t^2-2\right|=\left|t^2-t+1\right|=\left|\left(t-\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{3}{4}\right|$，

當$t=\dfrac{1}{2}$時，△ABP面積有最小值爲$\dfrac{3}{4}$．

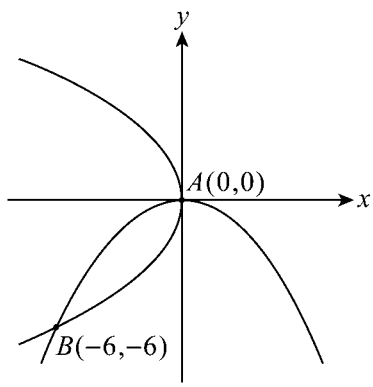
21.兩拋物線$y^2+6x=0$與$x^2+6y=0$相交於A、B二點，則$\overline{AB}$的長爲____________．

解答　$6\sqrt{2}$

解析　$\begin{cases}y^2+6x=0\cdots\cdots①\\x^2+6y=0\cdots\cdots②\end{cases}$

由② $y=-\dfrac{x^2}{6}$代入①得$\dfrac{x^4}{36}+6x=0$

$\Rightarrow x^4+216x=0\Rightarrow x(x^3+216)=0\Rightarrow x=0$或$x^3=-216\Rightarrow x=-6$，



①當 $x=0 \Rightarrow y=0$， $A(0,0)$，
②當 $x=-6 \Rightarrow y=-6$， $B(-6,-6)$，

$\therefore \overline{AB}=\sqrt{6^2+6^2}=6\sqrt{2}$.

22.抛物線的軸垂直於 x 軸，並通過 $(-1,0)$、$(-9,0)$、$(0,18)$ 三點，則過 $(-1,0)$ 的切線方程式爲_______.

解答 $16x-y+16=0$

解析 爲上下型抛物線，且過 $(-1,0)$、$(-9,0)$，即交 x 軸於此二點

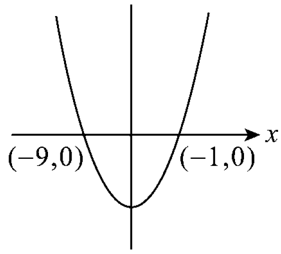
設 $y=a(x+1)(x+9)$，過 $(0,18) \Rightarrow 18=a\times1\times9 \Rightarrow a=2$

$\Rightarrow y=2(x+1)(x+9)=2x^2+20x+18$，

$\because (-1,0)$ 在抛物線上 $\Rightarrow$ 代切線公式：

$$\frac{y+0}{2}=2\times(-1)\times x+20\times\left(\frac{-1+x}{2}\right)+18 .$$

$\Rightarrow y=-4x-20+20x+36 \Rightarrow 16x-y+16=0$



23.焦點 F 的抛物線 $y^2=-4x$ 上有 A、B 兩點，這兩點在準線上的正射影分別爲 A_0、B_0，形成的梯形 AA_0B_0B 兩底長分別爲 10 與 2，高爲 8，則

(1) $\overline{AF}+\overline{BF}=$_________ . (2)又此抛物線上與直線 $2x-3y=12$ 距離最近的點坐標爲___________ .

解答 (1)12;(2) $\left(-\frac{9}{4},-3\right)$

解析 (1) $y^2=-4x \Rightarrow$ 開口向左，

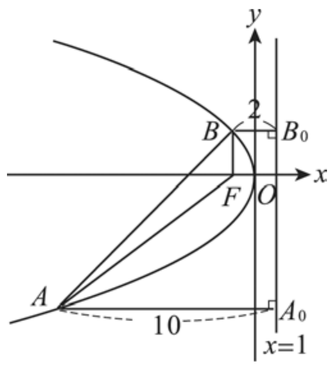
又 $4c=-4 \Rightarrow c=-1 \Rightarrow$ 焦點 $(-1,0)$，準線： $x=1$，

$\therefore \overline{AF}+\overline{BF}=\overline{AA_0}+\overline{BB_0}=10+2=12$.

(2)設抛物線上的點 $P(-t^2,2t)$，

$$d=\left|\frac{-2t^2-6t-12}{\sqrt{13}}\right|=\frac{2}{\sqrt{13}}\left|t^2+3t+6\right|=\frac{2}{\sqrt{13}}\left|\left(t+\frac{3}{2}\right)^2+\frac{15}{4}\right|,$$

當 $t=-\frac{3}{2}$，得最近的點坐標爲 $P\left(-\frac{9}{4},-3\right)$.



24.假設 Γ_1 爲坐標平面上一開口向上的抛物線，其對稱軸爲 $x=\frac{-3}{4}$ 且焦距（焦點到頂點的距離）爲 $\frac{1}{8}$.

若 Γ_1 與另一抛物線 $\Gamma_2: y=x^2$ 恰交於一點，則 Γ_1 的頂點之 y 坐標爲___________.（化成最簡分數）

解答 $\frac{9}{8}$

解析 設 $\Gamma_1:\left(x+\frac{3}{4}\right)^2=4\cdot\frac{1}{8}(y-k)$

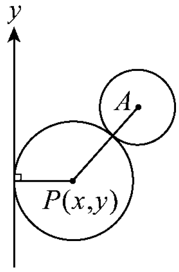
$\Gamma_2: y=x^2$ 代入 Γ_1 得 $\left(x+\frac{3}{4}\right)^2=\frac{1}{2}\left(x^2-k\right) \Rightarrow x^2+3x+\left(\frac{9}{8}+k\right)=0$

$\because$只有一交點　$\therefore D=0$　　$D=3^2-4\left(\frac{9}{8}+k\right)=0 \Rightarrow k=\frac{9}{8}$.

25.與 y 軸相切且與圓 $x^2+y^2-12x-4y+36=0$ 相外切的圓其圓心的軌跡方程式爲______ .

解答　$(y-2)^2=16(x-2)$

解析　設圓半徑爲 r ,



$x^2+y^2-12x-4y+36=0 \Rightarrow$ 圓心 $A(6,2)$, 半徑爲 2 ,

$\begin{cases} \overline{PA}=r+2 \\ d(P, y\text{軸})=r \end{cases} \Rightarrow \overline{PA}=d(P, y\text{軸})+2$, $\Rightarrow \sqrt{(x-6)^2+(y-2)^2}=|x+2|$

$(x^2-12x+36)+(y^2-4y+4)=x^2+4x+4$, 　$\therefore (y-2)^2=16(x-2)$.

[即圓心的軌跡爲以 $A(6,2)$ 爲焦點， $x+2=0$ 爲準線的抛物線。

其圖形爲左右形且頂點爲 $(2, 2)$, 　$c=6-2=4 \Rightarrow (y-2)^2=16(x-2)$]